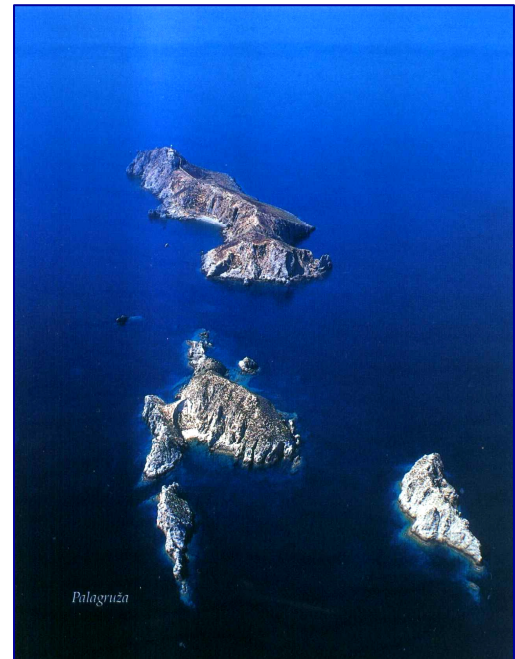
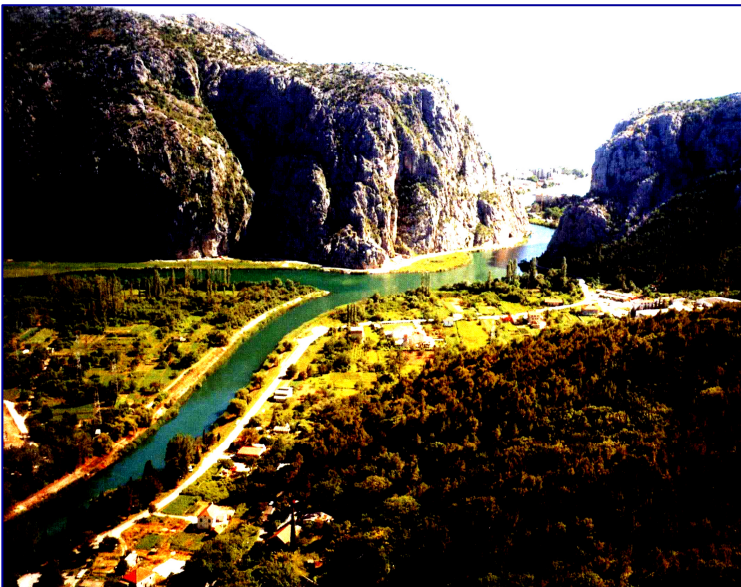


Mehanika tekućina



Goran Lončar
Vladimir Andročec

Sadržaj:

1 Karakteristične fizikalne veličine u promatranju tekućina i njihove osobine

- 1.1 Uvod
- 1.2 Promjena gustoće
 - 1.2.1 Temeljne spoznaje
 - 1.2.2 Gustoće tekućina
- 1.3 Trenje u tekućinama
- 1.4 Utjecaj gravitacije
- 1.5 Toplina u tekućinama
 - 1.5.1 Temeljne spoznaje
 - 1.5.2 Toplinski kapacitet, unutrašnja energija, entalpija
 - 1.5.3 Sposobnost vođenja topline, gustoća toplinskog toka
- 1.6 Kapilarnost i kontaktne površine kapljevine

2 Hidrostatika

- 2.1 Uvod
- 2.2 Sile u tekućini u mirovanju
 - 2.2.1 Ravnoteža sila u tekućini u mirovanju
- 2.3 Mehanika tekućine u mirovanju
 - 2.3.1 Energetska jednačba za hidrostatiku
 - 2.3.2 Osnovna jednačba hidrostatike
 - 2.3.3 Ekvipotencijalne
 - 2.3.4 Hidrostatski uzgon (Arhimedov zakon)
- 2.4 Tlak kapljevine na čvrste površine
 - 2.4.1 Sila tlaka na ravne površine
 - 2.4.2 Sila tlaka na zakrivljene površine
 - 2.4.3 Plivajuće kruto tijelo

3 Kinematika

- 3.1 Uvod
- 3.2 Pristupi u opisivanju tečenja tekućina
- 3.3 Kinematske fizikalne veličine
 - 3.3.1 Polje brzina
 - 3.3.2 Kinematski pojmovi uz opis tečenja
 - 3.3.3 Polje ubrzanja
- 3.4 Kinematika djelića tekućine
 - 3.4.1 Gradijentni tenzor polja brzina
 - 3.4.2 Translacija i rotacija djelića tekućine
 - 3.4.3 Promjena oblika djelića tekućine
- 3.5 Zakon očuvanja količine polja (jednačbe pronosa)
 - 3.5.1 Fizikalne veličine i njihove karakteristike
 - 3.5.2 Jednačbe pronosa za polja
 - 3.5.3 Jednačbe pronosa karakterističnih gustoća

4 Vidovi tečenja tekućina

- 4.1 Laminarno i turbulentno tečenje
- 4.2 Mirno i silovito tečenje

5 Zakon očuvanja mase

5.1 Uvod

5.2 Jednadžba kontinuiteta za kontrolni volumen

6 Zakon očuvanja količine gibanja

6.1 Uvod

6.2 Zakon očuvanja količine gibanja za kontrolni volumen

6.1.2 Utjecaj sila

6.3 Dinamička jednadžba (zakon očuvanja količine gibanja za djelić tekućine)

6.3.1 Osnovna dinamička jednadžba

6.3.2 Dinamička jednadžba za bezviskozne tekućine (Euler, Bernoulli)

6.3.3 Dinamička jednadžba za laminarno tečenje realne tekućine

6.3.4 Navier-Stokes-ova jednadžba za laminarno tečenje realne tekućine

6.3.5 Reynolds-ova jednadžba za osrednjeno turbulentno tečenje realne tekućine

6.3.6 Fenomenološki opis turbulencije

7 Strujanje tekućina uzduž krutih granica

7.1 Uvod

7.2 Jednoliko laminarno strujanje

7.2.1 Couette-ovo strujanje

7.2.2 Ravninsko Poiseuille-ovo strujanje

7.2.3 Laminarno strujanje sa slobodnim vodnim licem

7.3 Strujanje u graničnom sloju

7.3.1 Laminarni granični sloj

7.3.2 Turbulentni granični sloj

8 Strujanje u cjevovodima pod tlakom

8.1 Uvod

8.2 Raspodjela posmičnih naprezanja

8.3 Laminarno tečenje (Poiseuille-ovo tečenje)

8.4 Tranzicija iz laminarnog u turbulentno tečenje

8.5 Turbulentno tečenje

8.5.1 Raspodjela brzina

8.5.2 Otpor trenja

8.6 Nejednoliko strujanje u cijevima – lokalni gubici

8.7 Pumpe i turbine

9 Tečenje u otvorenim vodotocima

9.1 Proticajni presjek

9.2 Klasifikacija tečenja

9.2 Otpori i karakteristike turbulentnog tečenja

9.4 Jednadžba jednolikog tečenja u kanalu

9.5 Lokalne promjeni u geometriji toka pri tečenju sa slobodnim vodnim licem

9.6 Specifična energija poprečnog presjeka otvorenog vodotoka

9.7 Prelijevanje i istjecanje u kanalima otvorenih vodotoka

9.8 Vodni skok u otvorenim vodotocima

10 Potencijalno strujanje

10.1 Paralelno potencijalno strujanje

10.2 Izvori i ponori

10.3 Potencijalni vrtlog

10.4 Strujna mreža uz zadane rubne uvjete

11 Strujanje podzemnih voda

11.1 Uvod

11.2 Strujanje kroz poroznu sredinu

11.2.1 Darcy-jev zakon (1856)

11.2.2 Potencijalno strujanje kroz poroznu sredinu

11.2.3 Radijalno strujanje prema zdencima

12 Sile na tijelo pri opstrujavanju

12.1 Uvod

12.2 Otpor tijela i hidrodinamički uzgon

13 Eksperimentalna hidromehanika i modeliranje hidromehaničkih procesa

13.1 Uvod - pojam modela

13.2 Fizikalni, numerički i hibridni modeli

13.3 Fizikalni modeli

13.3.1 Geometrijska sličnost

13.3.2 Kinematska sličnost, sličnost svojstva tekućina i tlakova

13.3.3 Dinamička sličnost

13.3.4 Apsolutna mehanička sličnost

13.3.5 Newtonov uvjet sličnosti

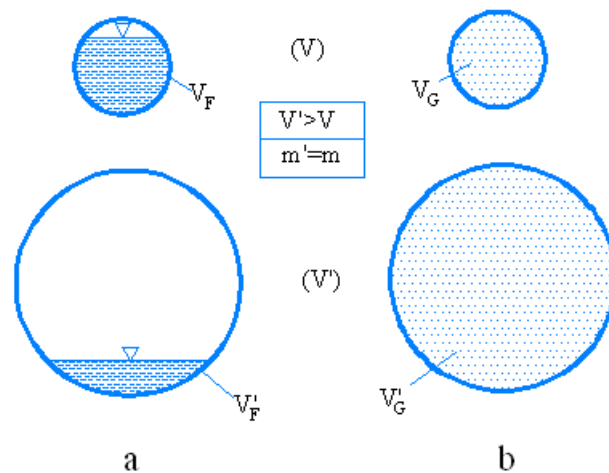
13.3.6 Parcijalne dinamičke sličnosti

13.4 Dimenzionalna analiza

1 Karakteristične fizikalne veličine u promatranju tekućina i njihove osobine

1.1 Uvod

Osnovna podjela tekućina je prema agregatnom stanju a to su kapljevine, pare i plinovi. Dok se pod kapljevinama podrazumijevaju tekućine koje imaju svojstvo ukapljavanja odnosno formiranja slobodne površine, pare su ustvari plinovi koji se nalaze blizu točke ukapljavanja. Para je zasićena ukoliko i pri najmanjem smanjenju temperature dolazi do njezinog ukapljavanja dok je pregrijana ukoliko je za njeno ukapljavanje potreban pad temperature sa konačnom vrijednosti kao i odgovarajuće povećanje tlaka. Plinovi su ništa drugo nego jako pregrijane pare. Obzirom da je sve plinove moguće ukapljiti u osnovi i nema razlike između plinova i para. Pri dovoljno velikoj temperaturi i dovoljno malom tlaku njihovo ponašanje poprima karakteristike idealnog plina. U općem slučaju kapljevine u ograničenom prostoru zbog jakih međumolekularnih sila ispunjavaju određeni volumen ali ne poprimaju stalnu formu koja ispunjava taj ograničeni prostor. Molekule plinova nalaze se u stalnom kretanju, pri kojem dolazi i do stalnog sudaranja a što u konačnici uzrokuje širenje plinova sve do potpunog ispunjavanja raspoloživog ograničenog prostora (slika 1.1).



Slika 1.1 – tekućine u mirovanju koje ispunjavaju dva spremnika različitih volumena (a-kapjevina, b-plin)

U mehanici krutog tijela pojam «nakupljenih» čestica daje smislaonu podlogu za potrebne opise statike, kinematike i dinamike krutog tijela, no u mehanici tekućina je samo uvjetno primjenjiv. U mehanici tekućina zamišlja se kontinuirano raspodijeljena masa tvari po prostoru, zbog čega se govori o kontinuumu. Osnovna karakteristika kontinuumu je da u svakoj njegovoj prostornoj i vremenskoj koordinati postoji masa. Prema tome umjesto konačno velikog broja «nakupljenih»

čestica u kontinuumu postoji beskonačno veliki broj elementarnih masa koje ostvaruju kontinuirano interakcijsko djelovanje. Zbog toga je kontinuum moguće dijeliti na beskonačno male volumene a da se pri tome ne izgube njegove fizikalne karakteristike. Naravno, kontinuum je samo jedna idealizirana predstava odnosno model potreban za jednostavnije opisivanje ponašanja stvarnog materijalnog tijela. Slučajeve u kojima se analizira ponašanje tijela na mikroskopskoj razini pri kojoj duljine slobodnog kretanja atoma ili molekula nisu više male naspram dimenzija tijela ne može se rješavati kroz mehaniku kontinuuma.

Uvođenje pojma kontinuuma znatno se pojednostavljuje matematički model potreban za opisivanja tekućine u mirovanju ili kretanju i to zbog makroskopskih karakteristika izraženih u vidu neprekinutih funkcija prostora i/ili vremena.

Suprotno krutom tijelu, tekućine su karakterizirane i sa pomakom njezinih djelića bez obzira koliko bila mala sila i rad koji se primjenjuju pri njezinu deformiranju. Tekućine se također dijele na homogene i nehomogene (heterogene). Homogene su one koje u svakoj točki prostora imaju iste vrijednosti pojedine fizikalne veličine.

1.2 Promjena gustoće

1.2.1 Temeljne spoznaje

Kapljevina u spremniku čak i pri vrlo visokim tlakovima ostvaruje vrlo malu promjenu volumena zbog čega se u većini praktičnih inženjerskih problema tretira kao nestišljiva. Primjerice pri promjeni tlaka od 1bar i pri sobnoj temperaturi voda će promijeniti svoj volumen za samo 0,005% pa se može usvojiti pretpostavka o njezinoj nestišljivosti odnosno konstantnoj gustoći. Ipak, mala elastičnost kapljevine u pojedinim inženjerskim problemima poput vodnog udara igra važnu ulogu te se ne može zanemariti.

S druge strane plinovi, primjerice zrak, generalno se ne mogu tretirati kao nestišljivi, budući da ostvaruju volumno širenje sve do potpunog popunjavanja prostora omeđenog rubovima unutar kojih se nalaze. Pri tom širenju značajno se mijenja i gustoća plina. Osim toga pri stalnom tlaku promjena volumena može uslijediti i kao posljedica promjene temperature. Potrebno je skrenuti pažnju i na eksperimentalno dokazanu činjenicu da pri brzinama znatno manjim od brzine zvuka, plinovi trpe vrlo male promjene gustoće a zbog čega ih je u takovim uvjetima moguće smatrati nestišljivim. Primjerice pri strujanju zraka pri atmosferskom tlaku i sobnim temperaturama sa brzinama <55 m/s

promjena gustoće je samo 1,5%. Iako i temperatura i tlak u općem slučaju imaju ulogu u promjeni gustoće, korištenje pojma «kompresibilnost» ukazuje na značajniju ulogu tlaka.

1.2.2 Gustoće tekućina

Pojam gustoće po definiciji se odnosi na masenu gustoću ρ u volumenu ΔV u kojem je kontinuirano rasprostranjena masa tekućine Δm .

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad ; \quad \rho = \frac{1}{v_V} \quad (1.1)$$

Gustoća je fizikalna veličina kapljevine sa dimenzijom M/L^3 odnosno jedinicom kg/m^3 . Specifični volumen izražava se kao $v_V = dV/dm = 1/\rho$. i kao takva češće se upotrebljava u području termodinamike. U općem slučaju fizikalne veličine ρ i v_V su ovisne o tlaku p (N/m^2) i temperaturi T (K) odnosno $\rho = f(p, T)$ i $v_V = f^{-1}(p, T)$.

Ukupna promjena gustoće tekućina može se opisati sa parcijalnim promjenama pri konstantnoj temperaturi i konstantnom tlaku:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_T dp - \beta_p dT \quad \text{sa} \quad \beta_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad , \quad \beta_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (1.2.a,b)$$

gdje je:

β_T – izotermni koeficijent stišljivosti (1/Pa)

β_p – toplinski koeficijent izduženja (1/K)

Između modula elastičnosti tekućine E_F i koeficijenta kompresibilnosti vrijedi odnos $E_F = 1/\beta_T$ a za nestišljive tekućine vrijedi i $\beta_T = \beta_p = 0$.

Barotropnim tekućinama se nazivaju one stišljive tekućine u kojima gustoća ovisi samo o tlaku $\rho = f(p)$. Pri promatranju ponašanja tekućina pod pojmom adijabatskog procesa podrazumijeva se samo onaj proces u kojem je točno određena masa tekućine toplinski izolirana od okoline pa sa njom nema ni toplinske izmjene.

Iz eksperimentalnog istraživanja provedenog sa vodom poznato je da se koeficijent stišljivosti β_T vrlo malo mijenja sa promjenama temperature i tlaka, odnosno da iznosi $\beta_T = \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ 1/Pa}$ a čime se dobiva i vrijednost modula elastičnosti $E_F \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$ koja se usvaja u rješavanju većine inženjerskih problema. Nasuprotno tome, toplinski koeficijent izduženja β_P bitno ovisi o temperaturi pa primjerice pri tlaku od 1bar i temperaturama 0° , 4° i $99,6^\circ \text{C}$ koeficijent β_P poprima vrijednosti $-0,08 \cdot 10^{-3}$, 0 i $0,75 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$. Zbog $\beta_P = 0$ pri $T = 4^\circ \text{C}$ voda upravo pri toj temperaturi ima najveću gustoću. Ova anomalija upravo je i razlog pojavi leda na vodenoj površini.

U tablici 1.1 dane su vrijednosti osnovnih fizikalnih parametara za pojedine tekućine.

TEKUĆINA			KAPLJEVINA			PARA	PLIN					
			voda	metanol	živa	voda	zrak	kisik	dušik	vodik	helij	ugljični dioksid
			H ₂ O	CH ₄ O	Hg	H ₂ O		O ₂	N ₂	H ₂	He	CO ₂
gustoća	ρ	kg/m ³	999,8	810	13 596	0,589	1,275	1,410	1,234	0,0888	0,176	1,951
	$\beta_T \cdot 10^5$	m ² /N	0,0001	0,000	0,000	1,016	1,007	0,987	0,987	0,999	0,987	1,007
	$\beta_P \cdot 10^3$	1/K	-0,085	1,19	0,181	2,879	3,674	3,677	3,678	3,666	3,657	3,746
	α_s	—	19945	11 226	284 067	1,320	1,397	1,398	1,402	1,412	1,668	1,300
brzina zvuka	c	m/s	1412	1185	1455	473	331	315	337	1261	973	258
specifična plinska konstanta	R	J/kg K	—	—	—	461,5	287,2	259,8	296,8	4124	2077	188,9
dinamički koeficijent viskoznosti	$\eta \cdot 10^5$	Pa s	179,3	81,7	168,5	1,229	1,710	1,924	1,672	0,782	1,871	1,367
	T_A	K	506	1110	160	—	—	—	—	—	—	—
	T_B	K	-150	-29	-96	—	—	—	—	—	—	—
	T_S	K	—	—	—	890	122	125	117	-10	86	242
kinem. koef. viskoznosti	$\nu \cdot 10^6$	m ² /s	1,794	1,009	0,124	20,85	13,41	13,46	13,37	88,11	104,8	7,006
specifični toplinski kapacitet	$c_p \cdot 10^{-3}$	J/kg K	4,217	2,428	0,140	2,032	1,006	0,917	1,041	14,19	5,193	0,827
	$\kappa = c_p/c_v$	—	1,001	1,226	1,134	1,341	1,402	1,399	1,402	1,410	1,667	1,309
toplinska vodljivost	$\lambda \cdot 10$	W/m K	5,683	2,14	77,9	0,247	0,237	0,243	0,240	1,620	1,453	0,150
temperaturna vodljivost	$a \cdot 10^6$	m ² /s	0,135	0,109	4,09	20,59	18,49	18,54	18,46	128,8	157,0	9,286
Prandtl-ov broj	Pr	—	13,31	9,25	0,030	1,012	0,72	0,726	0,724	0,685	0,667	0,755
	T_P	K	2071	1970	533	—	—	—	—	—	—	—
temperatura vrenja	t_S	°C	99,63	64,5	357	99,63	—	—	—	—	—	—

Tablica 1.1 – vrijednosti fizikalnih parametara za neke tekućine pri $p = 1\text{bar}$ i $T=0^\circ \text{C}$ te $p = 1\text{bar}$ i $T=100^\circ \text{C}$

Plinovi koji pri kretanju ostvaruju veće promjene u gustoći ne mogu se promatrati kao nestišljive tekućine a promjena gustoće je u funkciji tlaka i temperature $\rho = f(p,T)$. Veza između fizikalnih veličina T, p, v i ρ naziva se termička jednadžba stanja (Boyle, Gay-Lussac, Mariotte)

$$p v_v = RT, \quad p = \rho RT, \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}; \quad \frac{\rho}{\rho_b} = \frac{p}{p_b} \frac{T_b}{T} \quad (\text{plin}) \quad (1.3a,b,c ; d)$$

gdje je:

$R = R/M$ – specifična plinska konstanta pojedinog plina (J/kg K)

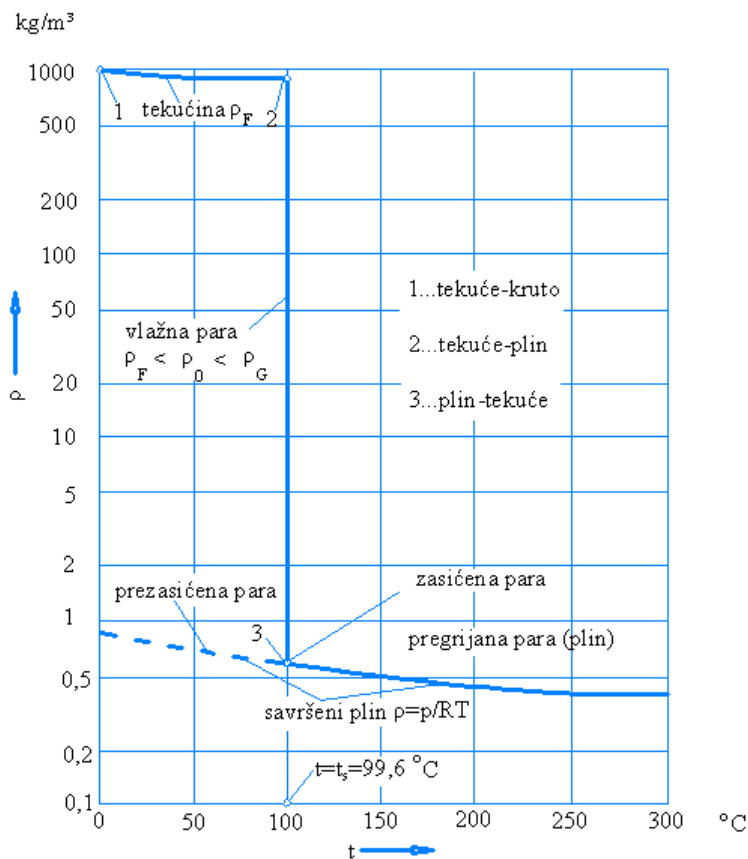
R – univerzalna plinska konstanta (8,3143 J/mol K.

M – molekularna masa (kg/kmol)

ρ_b – referentna gustoća pri referentnoj temperaturi T_b i referentnom tlaku p_b

Važno je napomenuti da gornja jednačba definira zakon u graničnom području koje je obilježeno sa vrlo malim tlakovima $p \rightarrow 0$ i ne pre niskim temperaturama. Plinovi koji se ponašaju prema termičkim jednačbama stanja nazivaju se i idealni plinovi.

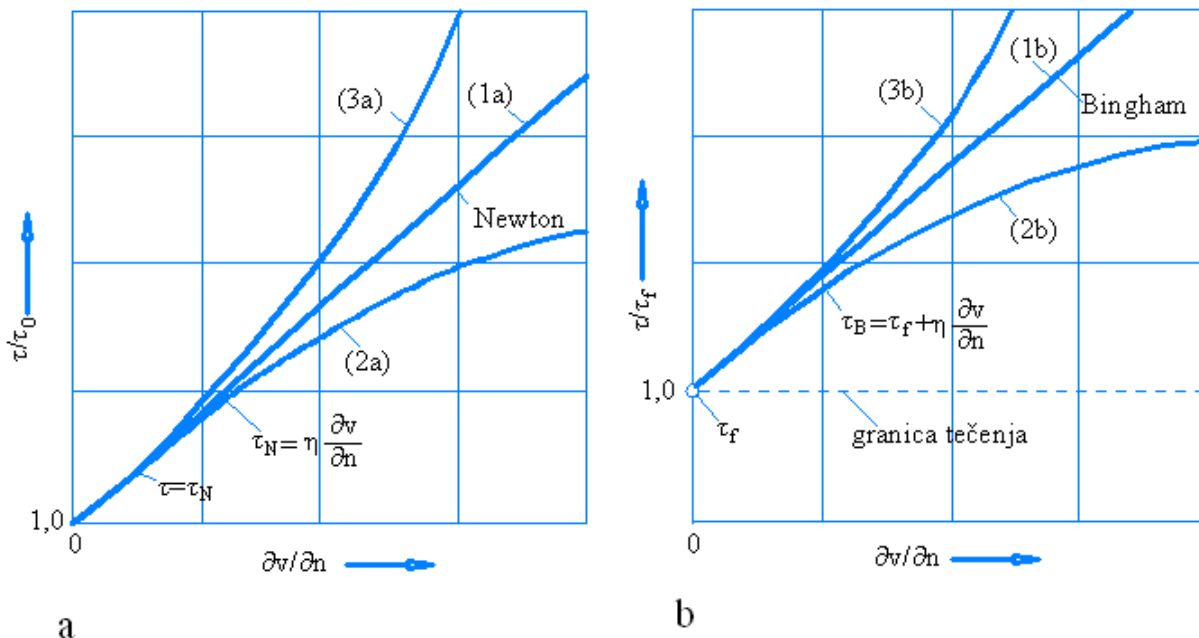
Pri analizi kretanja pregrijane pare također se može koristiti idealizacija u njezinom opisu u kojem se pregrijana para promatra kao idealan plin. Kod blago pregrijanih para (plinovi u blizini točke ukapljivanja) nastupa odstupanje od ponašanja po zakonima definiranim jednačbom 1.3 zbog čega se uvodi i proširenje jednačbe stanja za idealne plinove sa dodatnom van der Waals-ovom jednačbom stanja. Na slici 1.2 dan je prikaz promjene gustoće vode i prelazak u vodenu paru pri promjeni temperature T (zagrijavanje pri konstantnom tlaku $p = 1\text{bar}$). U prikazanom slučaju sa malim tlakovima termička jednačba stanja 1.3 zadovoljava potrebe proračuna gustoća pregrijane pare.



Slika 1.2 - prikaz promjene gustoće vode i prelazak u vodenu paru pri promjeni temperature T (zagrijavanje pri konstantnom tlaku $p = 1\text{bar}$)

1.3 Trenje u tekućinama

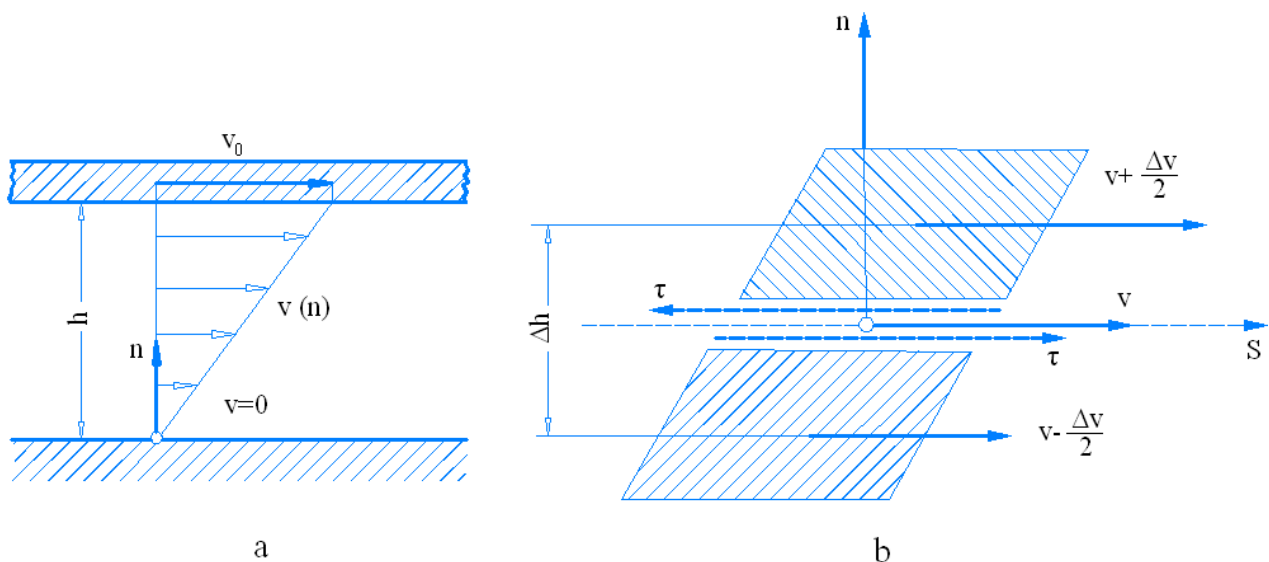
Iskustvo i eksperimentalna djelatnost pokazali su da se u nekim slučajevima tečenja utjecaj trenja može zanemariti i ispustiti iz jednadžbi koje opisuju ponašanje toka tekućine. U tim slučajevima govori se o tečenju idealne odnosno bezviskozne tekućine. Isto tako iz iskustva dobivenog na temelju eksperimenata poznato je da primjerice u slučaju opstrujavanja tekućine oko nekog tijela ili kretanja tijela kroz tekućinu postoji sila tekućine na tijelo i obratno. Ta sila je posljedica viskoznosti odnosno unutarnjeg trenja kao temeljnog svojstva realne tekućine. Isto tako, pri bilo kojem vidu tečenja, uslijed međusobnog djelovanja susjednih djelića tekućine pojavljuje se i njihova deformacija, a što također ukazuje na prisustvo naprezanja uzrokovanih trenjem. U tehničkom smislu trenje predstavlja vrlo važan segment u analizi tečenja tekućina budući da je ono i uzročnik nastalih gubitaka mehaničke energije.



Slika 1.3 - ovisnosti između tangencijalnih naprezanja i promjene brzine po normali za Newtonove tekućine (1a), Bingham-ova tekućina (1b), strukturno viskozne tekućine (2a,b), dilatacijske tekućine (3a,b).

Obzirom da trenje pokazuje različite vidove pojavnosti, realne tekućine se dijele na Newton-ove tekućine i anomalno viskozne tekućine (ne Newton-ove tekućine). Eksperimentalna disciplina koja se bavi proučavanjem i analizom funkcijskih odnosa između deformacija i naprezanja uslijed pojave trenja u tekućinama naziva se reologija. Reološki dijagram tekućina dan je na slici 1.3 u kojoj su prikazane ovisnosti između tangencijalnih naprezanja i promjene brzine po normali za Newtonove tekućine (1a), Bingham-ova tekućina (1b), strukturno viskozne tekućine (2a,b), dilatacijske tekućine (3a,b).

Već je I. Newton zaključio da osim «suhog» trenja koje se pojavljuje pri kretanju čvrstog tijela, pri kretanju tekućina postoji viskoznost odnosno unutarnje trenje između susjednih djelića tekućine. To trenje je približno neovisno o prisutnim normalnim napreznjima i proporcionalno je razlici brzina između brzina susjednih djelića tekućine. Na slici 1.4a dan je prikaz profila brzina u tekućini koja se nalazi između podloge u mirovanju i vrlo duge paralelne ploče na vrlo bliskoj udaljenosti h koja se pomiče jednolikom brzinom v_0 . Tlak je konstantan u cijelom prostoru ispunjenom sa tekućinom između dvije ploče. Brzina čestice tekućine uz podlogu je $v = 0$ dok čestica tekućine priljubljena ispod ploče u kretanju ima brzinu $v = v_0$. Na proizvoljnom položaju između ploče u kretanju čestica tekućine ima brzinu $v = (v_0/h) n$. Kako bi takvo kretanje bilo održivo očigledno je da na podlozi gornje ploče djeluje jedna tangencijalna sila u smjeru njezinog kretanja a koja je u ravnoteži sa silama trenja u tekućini ispod nje. Na temelju eksperimenata dobiven je i zaključak da je tangencijalno napreznanje τ ispod ploče proporcionalno brzini v_0 i obrnuto proporcionalno udaljenosti od podloge h a koeficijent proporcionalnosti označen je sa η i ovisi o tekućini koja se analizira. Nadalje, zaključak razmatranja je važeći i za cijelo područje između ploče i podloge.



Slika 1.4 – prikaz raspodjele brzine u laminarnom toku i u profilu realne Newton-ove tekućine između podloge u mirovanju i duge ploče koja se kreće sa brzinom v_0 te između dva susjedna djelića tekućine

Prema slici 1.4b dva susjedna djelića tekućine na normalni prema smjeru tečenja imaju brzine $v + \Delta v/2$ (gornji) odnosno $v - \Delta v/2$ (doljnji). Kroz unutarnji otpor gornji djelić sa većom brzinom deformira se isto kao i doljnji djelić a pri čemu se gornji djelić usporava odnosno doljnji ubrzava. Pri tome tangencijalno napreznanje definirano je na slijedeći način:

$$\tau = \eta \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta n} = \eta \frac{\partial v}{\partial n} \quad (\text{Newton}) \quad (1.4)$$

Na temelju eksperimenata (empirije) koeficijent proporcionalnosti η označuje dinamički koeficijent viskoznosti sa jedinicom Pas koji ima različite vrijednosti ovisno o promatranoj tekućini. Dinamički koeficijent viskoznosti jako ovisi o temperaturi i manje o tlaku pa se može usvojiti i pretpostavka $\eta = f(p, T) \approx f(T)$. Jednadžba 1.4 naziva se i konstitutivnom jednadžbom Newton-ove tekućine pri laminarnom tečenju.

Ukoliko se dinamički koeficijent viskoznosti podijeli sa gustoćom dobiva se novi koeficijent viskoznosti koji zbog neovisnosti o gustoći postaje kinematska veličina a naziva se kinematski koeficijent viskoznosti ν sa pripadnom jedinicom (m^2/s):

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (1.5)$$

Za različite kapljevine u rasponu temperatura $0 < T < 100$ °C dinamički koeficijent viskoznosti η približno je neovisan o tlaku a promjene njegove vrijednosti izražene su slijedećom jednadžbom:

$$\frac{\eta}{\eta_b} = \exp\left(\frac{T_A}{T + T_B} - \frac{T_A}{T_b + T_B}\right) \quad (1.6)$$

gdje je:

η_b – referentna vrijednost pri referentnom tlaku $p_b = 1$ bar i referentnoj temperaturi $T_b = 0$ °C (za vodu, metanol i živu vidi tablicu 1.1)

T_A, T_B – konstante pojedine kapljevine (eksperimentalno određene – vidi tablicu 1.1)

Kako i iz gornje jednadžbe proizlazi, sa povećanjem temperature, vrijednost dinamičkog koeficijenta viskoznosti η pada (vidi sliku 1.5)

Za plinove također vrijedi da je dinamički koeficijent viskoznosti η približno neovisan o tlaku a njegove vrijednosti pri različitim temperaturama izražene su poluempirijskom jednadžbom:

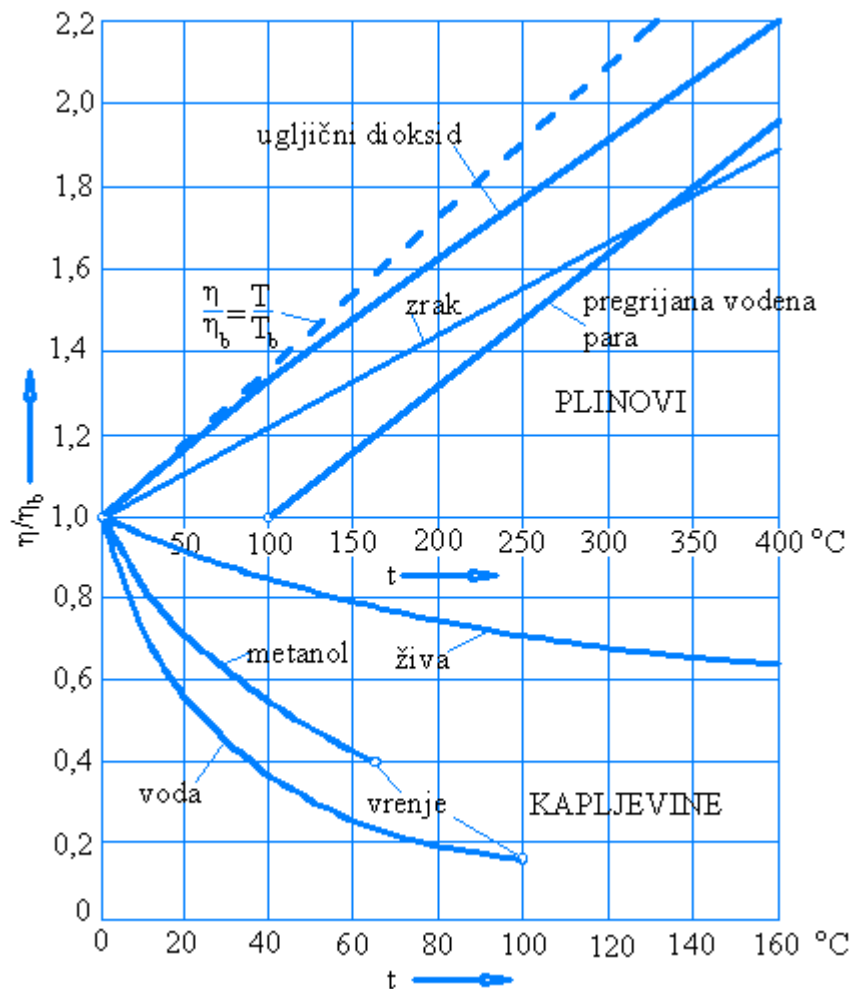
$$\frac{\eta}{\eta_b} = \frac{T_b + T_S}{T + T_S} \left(\frac{T}{T_b}\right)^{3/2}; \quad \frac{\eta}{\eta_b} \approx \left(\frac{T}{T_b}\right)^\omega \approx \frac{T}{T_b} \approx T \quad (1.7a;b,c)$$

gdje je:

T_S – Southerland-ova konstanta (eksperimentalno određena – vidi tablicu 1.1)

ω - koeficijent sa vrijednostima koje se aproksimativno mogu odrediti sa $\omega = \frac{1}{2} + T_S/(T_b + T_S)$

Na slici 1.5 dan je i prikaz promjena vrijednosti dinamičkog koeficijenta viskoznosti naspram referentnih vrijednosti η_b pri referentnom tlaku $p_b = 1\text{ bar}$ i referentnoj temperaturi $T_b = 0\text{ }^\circ\text{C}$ (vidi tablicu 1.1) za neke plinove i tekućine. Iz dijagrama sa slike 1.4 razvidno je da za plinove pri povećanju temperature vrijednost dinamičkog koeficijenta raste η (vidi sliku 1.5). U praktičnim problemima često puta se usvaja aproksimativni linearni odnos između temperature i viskoznosti prema jednadžbi 1.7c.



Slika 1.5 - prikaz promjena vrijednosti dinamičkog koeficijenta viskoznosti naspram referentnih vrijednosti η_b pri referentnom tlaku $T_b = 1\text{ bar}$ i referentnoj temperaturi $p_b = 0\text{ }^\circ\text{C}$

1.4 Utjecaj gravitacije

U kapljevina gravitacija ima važnu ulogu pri promatranju i analizi tečenja u domeni klasičnih inženjerskih problema. Prema tome u jednadžbama kojima se opisuje tečenje tekućina član koji prezentira djelovanje težine odnosno gravitacijskog ubrzanja $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (na površini zemlje) ne može se zanemariti. U okvirima klasičnih inženjerskih problema vezanih uz ponašanje plinova, utjecaj gravitacijskog ubrzanja moguće je zanemariti. Ipak, u području aeromehanike koja u pojedinim problemima analizira pojas atmosfere sa relativno velikom debljinom, a koja je sačinjena od plina, gravitacijsko ubrzanje se ne može zanemariti.

Na element tekućine mase Δm prema osnovnom Newton-ovom zakonu mehanike djeluje gravitaciona sila $\Delta F = \Delta mg$. Ta sila po iznosu je jednaka težini $G(N)$ promatranog elementa. Prema tome na masu djeluje masena sila $f_G = g(z) \approx \text{konst.}$ usmjerena prema središtu Zemlje odnosno prema dolje sa jedinicom ubrzanja m/s^2 .

1.5 Toplina u tekućinama

1.5.1 Temeljne spoznaje

U prijašnjim poglavljima pri komentarima vezanim uz fizikalne veličine gustoće i koeficijenta viskoznosti već se ukazalo na utjecaj temperature. Pri opisu tekućina koje se nalaze u kretanju potrebno je definirati još neke termodinamičke karakteristike i odgovarajuće fizikalne veličine. Pri tome promjena temperature kao posljedica dovođenja odnosno odvođenja topline igra važnu ulogu.

Za neki sustav koji se nalazi u termodinamičkoj ravnoteži za definiranje promjene termodinamičkog stanja sustava dovoljno je poznavati samo vrijednosti fizikalnih veličina Z_1 i Z_2 kojima se opisuje termodinamičko stanje na početku i na kraju procesa.

Ukoliko u procesu sudjeluje i izmjena topline, nije svejedno pod kojim okolnostima je ona sudjelovala u promjeni termodinamičkog stanja. U tom slučaju je osim poznavanja vrijednosti Z_1 i Z_2 potrebno i poznavanje uvjeta pod kojim se odvijao prelaz $Z_1 \rightarrow Z_2$ iz termodinamičkog stanja 1 u termodinamičko stanje 2. Prelazak iz stanja Z_1 u Z_2 tada se naziva «termodinamički proces» obzirom da je taj pojam širi i sveobuhvatniji od pojma «promjene stanja».

1.5.2 Toplinski kapacitet, unutarnja energija, entalpija

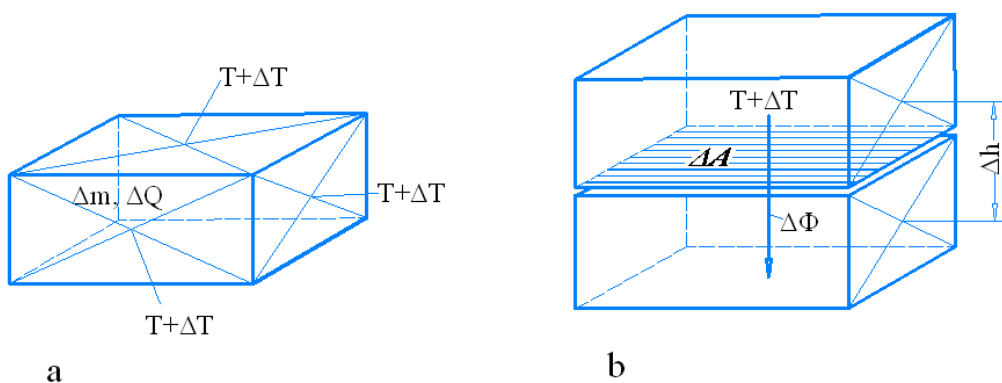
U procesima u kojem se pojavljuje toplina prema kalorimetrijskoj jednadžbi $\Delta Q = C\Delta T$ definirani su odnosi između elementa tekućine mase Δm , pohranjene količina topline ΔQ (J) i promjene temperature ΔT (K) (vidi sliku 1.6). C je oznaka za toplinski kapacitet sustava a definicijski izraz dan je sa jednakosti:

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{dQ}{dT}, \quad c = \frac{dq}{dT} \quad (1.8a,b)$$

Ukoliko se sa $q = \Delta Q/\Delta m$ označi količina topline po masi sa jedinicom J/kg tada je izraz 1.8b ustvari definicijska jednadžba za specifični toplinski kapacitet $c = C/\Delta M$. Ona je također jedna fizikalna karakteristika tekućine sa jedinicom J/kgK.

Prema prvom zakonu termodinamike u jednom sustavu koji se nalazi u ravnoteži i na koji od vanjskih sila djeluju samo sile tlaka, između količine topline q kao procesne veličine, tlaka p i specifičnog volumena v_V kao termodinamičkih veličina stanja, specifične unutarnje energije u (sadržana energija molekularnog kretanja pri konstantnom volumenu) i specifične entalpije h (sadržana toplina pri konstantnom tlaku) kao kalorijske veličine stanja, vrijede međusobni odnosi izraženi sa slijedećom jednadžbom:

$$\bar{d}q = du + pdv_V = dh - v_V dp \quad h = u + pv_V \quad (1.9a;b)$$



Slika 1.6 - «ponašanje» topline pri izdvojenom elementu tekućine i pri dva elementa tekućine koji se nalaze u međusobnom dodiru (a – prirast topline ΔQ pri $\Delta T > 0$ za definiranje toplinskog kapaciteta ; b – toplinski tok $\Delta \Phi$ pri $\Delta T > 0$ za definiranje sposobnosti vođenja topline λ)

Svi parametri gornje jednačbe imaju istu jedinicu J/kg. Jednačba 1.9a naziva se i kalorička jednačba stanja iz koje zaključno slijedi: ukoliko se jednom «zatvorenom» sustavu dovede dodatna toplina $dq > 0$, pri konstantnom volumenu $v_V = \text{konst.}$, njegova se unutarnja energija du povećava (1.9a), odnosno pri konstantnom tlaku $p = \text{konst.}$ povećava se njegova entalpija dh (1.9b).

Uvrštavanjem 1.9a u 1.8b dobiva se jednačba:

$$c = \frac{du}{dT} + p \frac{dv_V}{dT} = \frac{dh}{dT} - v_V \frac{dp}{dT}; \quad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v, \quad c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p \quad (1.10a;b)$$

Navedeni specifični toplinski kapacitet c ovisi ne samo o termodinamičkom stanju nego i o vidu procesa. Procesi pri kojima je konstantan specifičan volumen ($dv_V = 0$) nazivaju se izihorni a oni pri kojima je tlak konstantan izobarni ($dp = 0$). Stoga se definiraju i dva specifična kapaciteta (1.10b), jedan pri konstantnom volumenu c_v i jedan pri konstantnom tlaku c_p .

Za nestišljivu tekućinu vrijedi $c_v = c_p = c$. pa se stoga u najvećem broju inženjerskih problema sa dovođenjem topline u kapljevinama ($\rho = \text{konst.}$) usvaja jednakost c_v i c_p odnosno zanemaruje se rad koji se ostvaruje pri zanemarivo maloj promjeni volumena.

Za idealan plin diferenciranjem se dobiva $(\partial c_v / \partial v)_T = 0 = (\partial c_p / \partial p)$ a što znači da su toplinski kapaciteti ovisni samo o temperaturi.

Promjene specifične unutarnje energije i specifične entalpije definirane su izrazima:

$$du = c_v dT - \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right] dv_V, \quad dh = c_p dT + \left[v_V - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \quad (1.11a,b)$$

Između specifične unutarnje energije i specifične entalpije, kao izvedene veličine stanja, vrijedi međusobni odnos definiran jednačbom:

$$dh = du + d \left(\frac{p}{\rho} \right), \quad h = u + \frac{p}{\rho} \quad (1.12a,b)$$

Kod tekućina sa $\rho = \text{konst.}$ i $c_V = c_P = c$ dobiva se pojednostavljena formulacija $dh = c dT + dp/\rho$ i $du = c dT$. U praktičnim inženjerskim primjerima često se usvaja i $c = \text{konst.}$ te se integracijom jednostavno dobivaju odgovarajuće jednakosti $u = cT$ i $h = cT + p/\rho$.

1.5.3 Sposobnost vođenja topline, gustoća toplinskog toka

Pri prijelazu topline između dva susjedna djelića tekućine prema slici 1.6b, tok (eng: flux) topline je proporcionalan promjeni temperature pri pronosu od jednog do drugog djelića. Toplinski tok $\Delta\Phi$ kroz kontaktnu površinu ΔA iznosi $\Delta\Phi = \varphi\Delta A$ i ima jedinicu J/s a φ predstavlja gustoću toplinskog toka izraženu sa jedinicom J/sm². Prema Fourier-ovom zakonu gustoća toplinskog toka izražava se slijedećom jednačinom:

$$\varphi = - \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta n} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (1.13)$$

gdje je:

$\partial T/\partial n$ – promjena temperature okomito na kontaktnu površinu (K/m)

λ - molekularna toplinska vodljivost (konstitutivna fizikalna veličina tekućine, W/Km)

Predznak «-» ima značenje da tok topline ima smjer od veće ka manjoj temperaturi. Potrebno je naglasiti postojanje sličnosti odnosno analogije između jednačbe 1.13 i 1.4. Molekularna toplinska vodljivost λ znatno ovisi o temperaturi i u znatno manjoj mjeri o tlaku odnosno $\lambda = f(p, T) \approx \lambda(T)$. Pri povećanju temperature λ raste ukoliko se promatra ponašanje plinova dok je u slučaju kapljevine vrijednost λ približno konstantna bez obzira na promjenu temperatura. Skreće se pažnja na analogno ponašanje λ i η pri povećanju temperature.

Jedna od u praksi često korištenih izvedenih fizikalnih veličina je i «sposobnost vođenja topline» a koja se dobiva dijeljenjem λ sa gustoćom ρ i specifičnim toplinskim kapacitetom c_P . Kao i kinematski koeficijent viskoznosti ν , a ima jedinicu m²/s.

Prandtl-ov broj je bezdimenzionalni parametar izražen putem omjera ν i a odnosno jednačinom:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{c_P \eta}{\lambda} \quad (1.14a,b)$$

Prandtl-ov bezdimenzionalni parametar ovisi samo o konstitutivnim fizikalnim veličinama tekućine.

U tekućinama postoji jedna izražena ovisnost između temperature i vrijednosti Prandtl-ovog bezdimenzionalnog parametra koja se može aproksimativno izraziti sa jednadžbom:

$$\frac{Pr}{Pr_b} = \exp\left(\frac{T_p}{T} - \frac{T_p}{T_b}\right) \quad (1.15)$$

gdje je:

Pr_b – referentni Prandtl-ov broj pri referentnom tlaku $p_b = 1 \text{ bar}$ i referentnoj temperaturi $T_b = 0 \text{ }^\circ\text{C}$

(primjerice za vodu pri $T = 0 \text{ }^\circ\text{C} \rightarrow Pr = 13,3$ a pri $T = 20 \text{ }^\circ\text{C} \rightarrow Pr = 7,0$)

U plinovima koji se nalaze u rasponu temperatura $100\text{K} < K < 1000$ vrijednost Prandtl-ov broja je približno konstantana ($0,67 < Pr < 0,76$) a u najvećem broju inženjerskih problema uobičajeno je usvajanje vrijednosti $Pr = 1$.

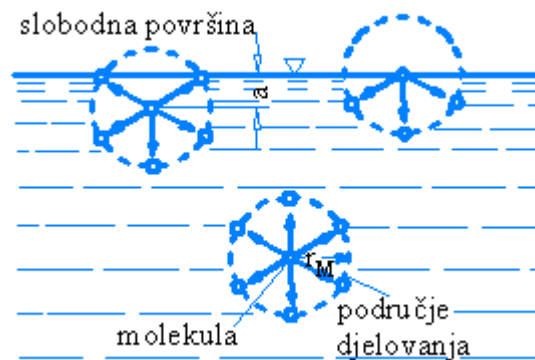
Potrebno je naglasiti da su spomenuti parametri od primarne važnosti samo ukoliko se promatra laminarno tečenje pri kojem se pronos uistinu ostvaruje kroz miješanje odnosno izmjenu na molekularnoj razini. U kasnijim poglavljima detaljnije će se definirati pojmovi laminarnog i turbulentnog tečenja a vezano na ovo zadnje i odgovarajući parametri η' i λ' koji nisu konstitutivne fizikalne veličine tekućina ali koji imaju izraženu pojmovnu analogiju sa spomenutim veličinama η i λ .

1.6 Kapilarnost i kontaktne površine kapljevina

Molekule tekućina koje se nalaze na kontaktnoj površini dviju kapljevina ili kapljevine i plina, koje se ne miješaju, izložene su djelovanju molekularnim privlačnim silama obje tekućine. Forma kontaktne površine ovisi o prirodi obe tekućine. Ukoliko se jedna kapljica kapljevine manje gustoće položi na kapljevinu veće gustoće, tekućina manje gustoće će zadržati svoj oblik kapljice ili će se razliti u obliku tankog filma po površini gušće tekućine (nafta na vodi ili voda na živi).

Na svaku molekulu kapljevine koja se nalazi u mirovanju djeluju privlačne sile koje se nazivaju kohezivne ukoliko se promatraju molekule dviju različitih kapljevina. Te sile imaju mali radijus djelovanja ($r_M = 10^{-7} \text{ cm}$).

Ukoliko se molekula tekućine nalazi na udaljenosti $a > r_M$ od kontaktne površine sa plinom, sile na tu molekulu djelovati će istim intenzitetom u svim smjerovima zbog čega će se i poništavati. Ukoliko je udaljenost $a < r_M$ na molekulu djeluju sile koje nisu međusobno uravnotežene pa postoji i rezultantna sila $F_M \neq 0$. Privlačne sile molekula plina na molekule kapljevine su zanemarivo male pa je rezultantna sila F_M to veća što je udaljenost od kontaktne površine a manja. Iz tog razloga na kontaktnoj površini ostaje onaj broj molekula koji je minimalno potreban za formiranje slobodnog vodnog lica odnosno te kontaktne plohe između plina i kapljevine. Prema tome može se reći da slobodna površina jedne kapljevine ima tendenciju ka smanjenju. Forma kapljice upravo to i dokazuje budući da se njom postiže minimalna površina kojom se obuhvaća volumen tekućine u kapljici. Zadržavanje kapljičaste forme moguće je samo ukoliko u kontaktnoj površini sa plinom postoji određeno stanje naprezanja a koje se naziva površinska napetost.



Slika 1.7 – djelovanje molekularnih privlačnih sila pri slobodnom vodnom licu

Naponi na kontaktnoj plohi nazivaju se i kapilarnim naponima σ . U svim točkama kontaktne površine vrijednost σ je ista a odgovarajuća jedinica je N/m. σ je također jedna konstitutivna fizikalna veličina koja ovisi o obe međusobno nemiješajuće tekućine a uobičajeno je za nju koristiti i naziv «kapilarna konstanta». Tanke cjevčice u kojima je efekt kapilarnosti vrlo izražen nazivaju se i kapilare. U tablici 1.2 dan je i prikaz vrijednosti kapilarne konstante σ za neke karakteristične kombinacije tekućina u kontaktu i bez njihovog međusobnog miješanja.

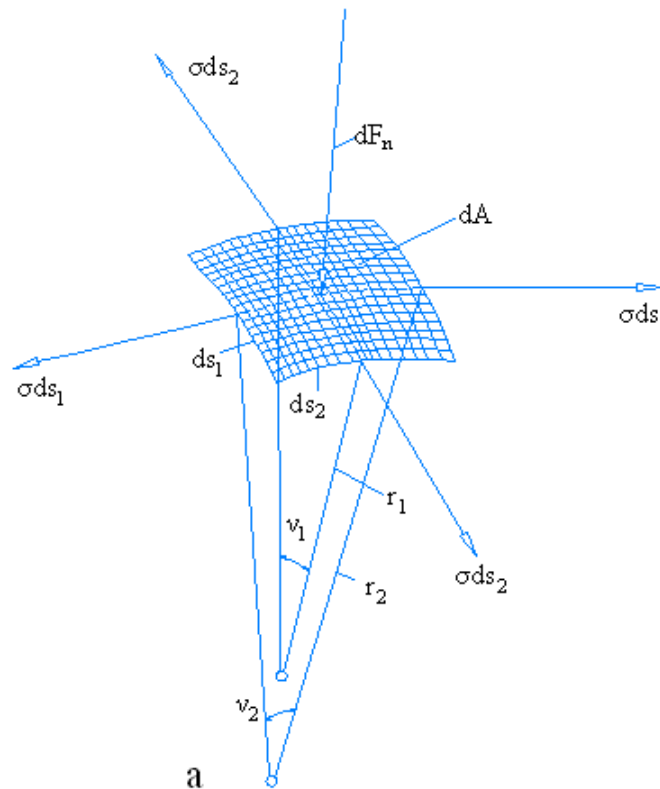
Rezultantni površinski naponi koji se pojavljuju u horizontalnom dijelu kontaktne plohe jednaki su 0 budući da se oni međusobno poništavaju, no na dijelovima kontaktne plohe koja je zakrivljena pojavljuje se i razlika tlakova koja će uravnotežiti rezultante površinske napone različite od 0 kako bi se ostvario konstantan položaj (mirovanje) kontaktne plohe.

Kombinacija tekućina		N/m
Voda	Zrak	0,073
	Vodena para	0,059
Živa	Zrak	0,475
	Voda	0,427
Alkohol	Zrak	0,023
	Voda	0,004
Ulje	Zrak	0,025...0,035
	Voda	0,023...0,048

Tablica 1.2 - prikaz vrijednosti kapilarne konstante σ za neke karakteristične kombinacije tekućina u kontaktu i bez njihovog međusobnog miješanja.

Tangencijalni naponi σ na zakrivljenom segmentu kontaktne plohe dA imaju rezultantu dF_n koja ustvari predstavlja silu okomitu na taj segment kontaktne plohe. Rezultanta dF_n proporcionalna je zakrivljenosti segmentne plohe. Rezultantni tlak p_K na zakrivljenom segmentu kontaktne plohe dobiva se dijeljenjem rezultatne sile dF_n sa površinom zakrivljenog segmenta kontaktne plohe dA , ima jedinicu Pa i određuje se jednažbom (vidi sliku 1.8):

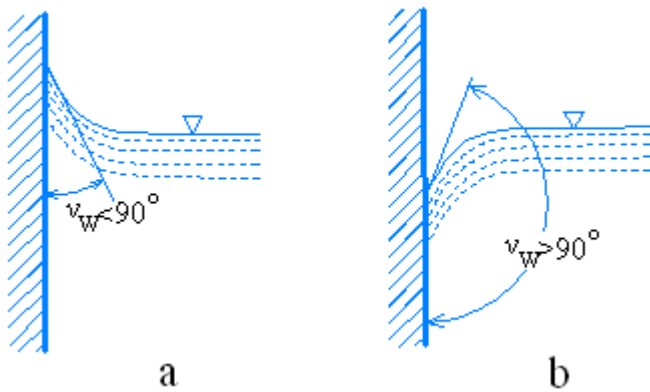
$$p_K = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad p_K = \frac{2\sigma}{r_K} \quad (r_1 = r_2 = r_K) \quad (1.16a,b)$$



Slika 1.8 - zakrivljeni segment kontaktne plohe dA i pripadna rezultanta dF_n

Vrijednost p_K je pozitivna (prema «unutra» ukoliko je kontaktna ploha konveksna. U slučaju konkavne kontaktne plohe radijuse r_1 i r_2 potrebno je uvrstiti sa negativnim predznakom. Jednadžba 1.16b važeća je za kontaktne plohe koje imaju formu kugle ($r_1 = r_2 = r_K$).

Ukoliko kapljevina dodiruje stjenku krutog tijela njezine molekule nisu više samo pod utjecajem obje kontaktne tekućine (plina i kapljevine) već i pod utjecajem «krute» granice odnosno čvrste stjenke (adhezivne sile). Ukoliko su privlačne sile između čvrste stjenke i molekula tekućine, primjerice vode, znatno veće nego privlačne sile između molekula tekućine, tekućina (voda) će u blizini čvrste stjenke imati tendenciju ka širenju po njoj. Kod žive to nije slučaj pa živa u blizini čvrste stijene ima tendenciju ka formiranju zakrivljene slobodne površine (vidi sliku 1.9a,b)



Slika 1.9a,b – oblici slobodnih površina kapljevina na kontaktu sa čvrstom stijenom (a – voda i staklo ; b – živa i staklo)

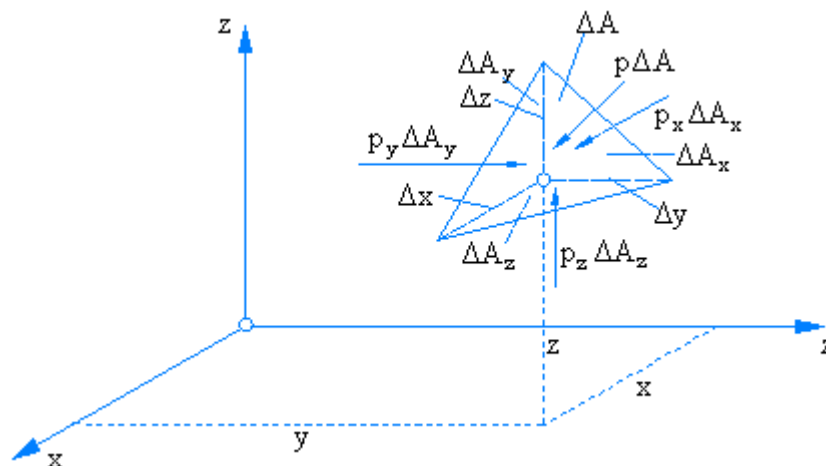
2 Hidrostatika

2.1 Uvod

Pri analizi tekućina u mirovanju kinematska obilježja ne igraju nikakvu ulogu. Sve sile koje djeluju na promatranu tekućinu nalaze se u mehaničkoj ravnoteži a tlak i gravitacijsko ubrzanje osnovni su pojmovi koji se koriste pri analizi u domeni hidrostatike.

2.2 Sile u tekućini u mirovanju

Zamišlja se mali (elementarni) volumen tekućine koji je okružen sa tekućinom koja na njega djeluje površinskim silama preko kontaktnih površina. Isto tako na elementarni djelić tekućine djeluju i masene odnosno volumne sile. Odnosi tih sila određuju da li će se taj elementarni volumen nalaziti u kretanju (neravnoteža sila) ili u mirovanju (ravnoteža sila). U općem slučaju površinske sile sačinjene su od tangencijalnih i normalnih sila, no u hidrostatskom stanju ravnoteže i kretanju idealne (bezviskozne) tekućine postoje samo normalne sile u vidu tlačnih sila a vlačne sile u unutrašnjosti plinova ili tekućina ne mogu se prenositi. Da postoje vlačne sile ne bi bilo ni moguće da plinovi okupiraju cijeli raspoloživi prostor između granica kojima je njihovo daljnje širenje onemogućeno.



Slika 2.1 – ravnoteža sila na isječeni tetraedar iz tekućine u mirovanju

Ukoliko se sa ΔA označi površina na elementarnom volumenu tekućine te sa ΔF_P tlačna sila koja djeluje na tu površinu, može se napisati i definicijski izraz za tlak sa jedinicom Pascal [Pa]:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_P}{\Delta A} = \frac{dF_P}{dA} > 0 \quad (2.1a)$$

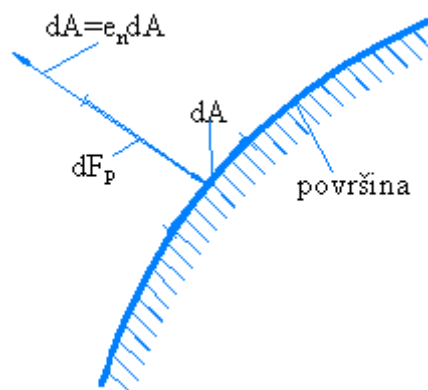
Obzirom na proizvoljno odabranu točku u prostoru, intenzitet djelovanja tlaka neovisan je od smjera, odnosno tlak u točki je u svim smjerovima isti. Prema teoriji elastičnosti pri ravnotežnom naprezanju krutog tijela koje se nalazi u mirovanju to nije slučaj. Kao dokaz tvrdnji vezanoj na tekućine može se promatrati elementarni tetraedar (vidi sliku 2.1). Tlakovi u x, y, z smjeru označeni su sa p_x, p_y, p_z a tlak okomit na kosu stranicu tetraedra p . Površine na koje djeluju tlakovi p_x, p_y, p_z i p imaju oznake $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$ i ΔA pa su tlačne sile na njih proporcionalne površinama. Na tetraedar djelujuća masena sila (sila teže) je volumna sila koja je po iznosu proporcionalna volumenu. Obzirom da su volumne sile vezane na volumen (trećeg reda) a površinske na površinu (drugog reda), volumne sile su reda veličine manje pa se mogu shvatiti i kao male naspram površinskih sila tlaka. Iz toga slijedi da površinske sile i bez volumnih sila moraju zadovoljavati uvjete ravnoteže. Ukoliko se uvedu oznake α, β, γ za kutove između osi x, y, z i normala na površinu ΔA , tada vrijede i odnosi $\Delta A_x = \Delta A \cos \alpha, \Delta A_y = \Delta A \cos \beta, \Delta A_z = \Delta A \cos \gamma$ a uvjeti ravnoteže za površinske sile tlaka na tetraedar u tri koordinatna smjera (x, y, z) glase:

$$p_x \Delta A_x - p \Delta A \cos \alpha = 0 ; p_y \Delta A_y - p \Delta A \cos \beta = 0 ; p_z \Delta A_z - p \Delta A \cos \gamma = 0$$

Uvrštavanjem međusobnih odnosa površina $\Delta A_x = \Delta A \cos \alpha, \Delta A_y = \Delta A \cos \beta, \Delta A_z = \Delta A \cos \gamma$ u uvjete ravnoteže dobiva se tzv. Pascal-ov zakon:

$$p_x = p_y = p_z = p \quad (2.1b)$$

Koji upravo dokazuje tvrdnju da je tlak u točki jedna skalarna veličina neovisna o smjeru. Tlak je kontinuirano derivabilna funkcija prostora $p = p(x, y, z)$ pa se govori i o polju tlaka $p = p(\mathbf{r})$.



Slika 2.2 – prikaz djelujuće sile tlaka dF_p okomito na površinu dA

Zaključci dosadašnjih razmatranja u vezi sile tlaka važeći su i u slučaju djelovanja tlaka na površinu čvrste konture. Sila tlaka $d\mathbf{F}_P$ koja djeluje okomito na površinu dA i predstavlja vektorsku veličinu sa vrijednosti $p dA$. Prema slici 2.2 dobiva se slijedeći izraz:

$$d\mathbf{F}_P = -p d\mathbf{A}, \quad \mathbf{F}_P = - \int_{(A)} p d\mathbf{A} \quad (2.2a,b)$$

gdje je:

$d\mathbf{A} = \mathbf{e}_n dA$ – usmjerena površina sa vektorom vanjske normale \mathbf{e}_n

Prema slici 2.3 promatra se jedan mali prostorni djelić tekućine proizvoljnog oblika i volumena ΔV i pripadne mase $\Delta m = \rho \Delta V$. Na površini ΔA pojavljuju se na infinitezimalne površine dA samo normalne sile tlaka uslijed djelovanja okolne tekućine, također u mirovanju. Ukoliko se vladajući tlak u koordinatama ishodišta $x = y = z = 0$ označi sa p_0 a prostorni element se usvoji kao vrlo mali, tada se tlak na njegovu površinu ΔA može izraziti sa razvijanjem u Taylor-ov red:

$$p(x, y, z) = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_0 z + \dots$$

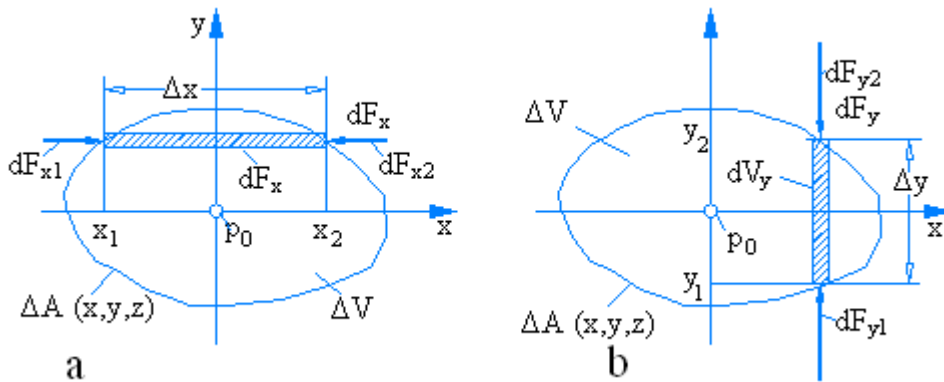
U gornjem izrazu p_0 kao i gradijenti $(\partial p/\partial x)_0$, $(\partial p/\partial y)_0$, $(\partial p/\partial z)_0$ imaju konstantne vrijednosti. Prema 2.1a i slici 2.3 dobiva se komponenta sile tlaka $dF_x = dF_{x1} - dF_{x2} = (p_1 - p_2) dA_x$ u x smjeru a koja djeluje normalno na orijentiranu površinu dA_x u x smjeru. Prema tome mogu se pisati slijedeće jednakosti.

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} (x_2 - x_1) dA_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x dA_x, \quad \Delta F_{Px} = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta V$$

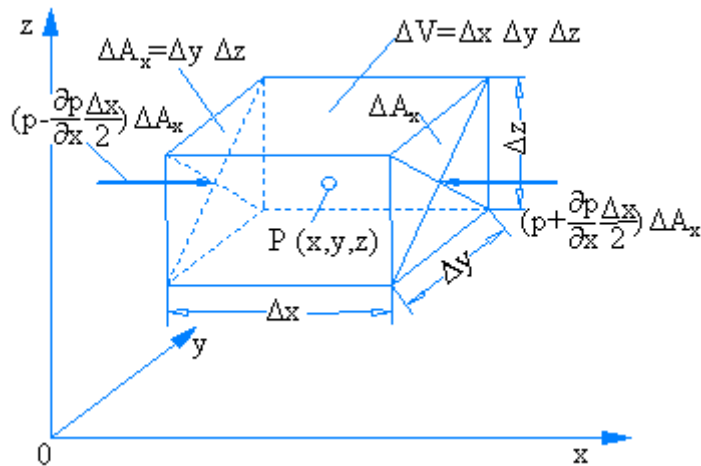
Komponenta sile tlaka na prostorni element u x – smjeru $\Delta F_{Px} = \int dF_x$ dobiva se integracijom po volumenu $\Delta V = \int dV_x$ (šrafirani dio volumena sa slike 2.3 $dV_x = \Delta x dA_x$).

Do istog rezultata dolazi se i na način da se promatra elementarni volumen tekućine u obliku kvadra sa slike 2.4. Na masu $\Delta m = \rho \Delta V$ djeluje sila tlaka koja je u vektorskom obliku neovisnom o izboru koordinatnog sustava dana jednadžbom: (f_P ima jedinicu m/s^2)

$$f_p = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta F_p}{\Delta m} = \frac{dF_p}{dm} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad f_{p_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.3a, b)$$



Slika 2.3 – Sila tlaka na jedan element tekućine sa proizvoljnim oblikom (a- komponenta u x smjeru ; b - komponenta u y smjeru)



Slika 2.4 – Sila tlaka na jedan element tekućine jednostavnog geometrijskog oblika

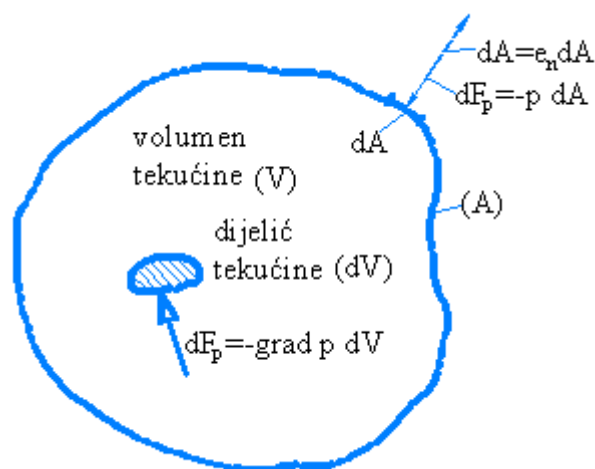
Osim sila tlaka na elementarni volumen često puta je interesantno analizirati sile tlaka koje djeluju i na konačnom volumenu tekućine V . Na slici 2.5 prikazan je proizvoljno odabrani volumen V koji je omeđen sa površinom A . Unutar volumena V nalaze se infinitezimalni volumeni dV na koje djeluju sile tlaka $d\mathbf{F}_P = \mathbf{f}_P dm = -\text{grad } p dV$. Integracijom po cijelom volumenu V dobiva se ukupna sila tlaka:

$$\mathbf{F}_P = - \int_{(V)} \text{grad } p dV = - \int_{(A)} p d\mathbf{A} = \mathbf{F}_A \quad (2.4a, b, c)$$

Desna strana gornjeg izraza dobivena je primjenom Green-Gauss-Ostrogradski teorema:

$$\oint_{(A)} \mathbf{a} dA = \int_{(V)} \text{grad } a dV$$

prema kojem se jedan volumni integral može pretvoriti u površinski integral pri kojem je područje integracije površina koja zatvara volumen V . Nadalje, $dA = \mathbf{e}_n dA$ je usmjerena površina a \mathbf{e}_n je vanjska normala na površinu. Iz jednadžbe 2.4b razvidno je da dolazi do međusobnog poništavanja sila tlaka u unutrašnjosti volumena V te da se ukupno djelovanje tlaka očituje samo kroz djelovanje tlaka po oplošnoj površini dA .



Slika 2.5 – Sile tlaka u unutrašnjosti proizvoljnog volumena V i na njegovu oplošnu površinu A

Kao vanjske sile na elementarni ili proizvoljni volumen djeluju i masene sile a sila teže je od primarnog interesa (elektromagnetske sile se zanemaruju). S vektorom \mathbf{g} označava se gravitaciono ubrzanje koje djeluje na masu Δm a čime se dobiva i odgovarajuća sila $\Delta \mathbf{F}_B = \Delta m \mathbf{g}$. U vektorskom (2.5a) i komponentnom (x, y - 2.5b ; z - 2.5c) prikazu pripadna masena sila definirana je sa:

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{g}, \quad f_{Bx} = f_{By} = 0, \quad f_{Bz} = -g \quad (2.5 \text{ a,b,c})$$

Ukoliko se element tekućine sa masom Δm rotira sa jednolikom kutnom brzinom ω oko vertikalne osi z , na njega osim sile teže sa intenzitetom $\Delta F_{Bz} = \Delta m g$ i smjerom vertikalno prema dolje također djeluje i centrifugalna sila intenziteta $\Delta F_{Br} = \Delta m \omega^2 r$ radijalnog smjera u horizontalnoj ravnini. U tom slučaju djelujuće masene sile po komponentama imaju vrijednosti:

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{g} + \mathbf{a}_C, \quad f_{Bxy} = a_C = \omega^2 r \quad (r = (x^2 + y^2)^{1/2}), \quad f_{Bz} = -g \quad (2.6 \text{ a,b,c})$$

2.2.1 Ravnoteža sila u tekućinama u mirovanju

Ravnotežno stanje na elementu tekućine $\Delta m = \rho \Delta V$ uspostavljeno je ukoliko je vektorski zbroj masenih sila $\Delta \mathbf{F}_B$ i sila tlaka $\Delta \mathbf{F}_P$ jednak nuli (Euler, 1755). Prema tome za elementarnu masu tekućine u mirovanju Δm vrijedi temeljna jednadžba hidrostatičke:

$$\mathbf{f}_B + \mathbf{f}_P = 0 \quad (2.7)$$

Polja sila koja se mogu opisati uz pomoć jedne potencijalne funkcije nazivaju se konzervativna polja sila. Pri tome je jednadžba 2.7 zadovoljena ukoliko je zadovoljen nužan i dovoljan uvjet postavljen na masene sile:

$$\text{rot } \mathbf{f}_P = 0 ; \text{rot } \mathbf{f}_B = 0 \quad (2.8a,b)$$

Smisao gore danih izraza je taj da u nestišljivim tekućinama ravnoteža sila može nastupiti samo ukoliko su masene sile ujedno i konzervativne.

Polje gravitacionog i centrifugalnog potencijala izražava se sa:

$$u_B(z) = gz, \quad u_B(r) = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (2.9a,b)$$

Praktički u svim slučajevima promatranja kapljevine može se usvojiti $g(z)=\text{konst.}$

2.3 Mehanika tekućine u mirovanju

2.3.1 Energetska jednadžba za hidrostatičku

Ravnoteža masenih i tlačnih sila na jedan djelić tekućine u mirovanju opisana je sa jednadžbom 2.7. Iz toga slijedi da je suma potencijala masenih sila i sile tlaka konstantna bez obzira na prostorni položaj u kojem se nalazi odabrani djelić tekućine a što je moguće ukoliko je suma energije položaja i energije tlaka (sa jedinicom J/m^3) također konstantna:

$$\int \frac{dp}{\rho(p)} + gz = \text{konst}, \quad dp + \rho gz = 0 \quad (2.10b,c)$$

Jednadžba 2.10 predstavlja energetska jednadžbu mehanike tekućina za slučaj tekućine u mirovanju a kojom su obuhvaćene energije položaja i tlaka (potencijalne energije).

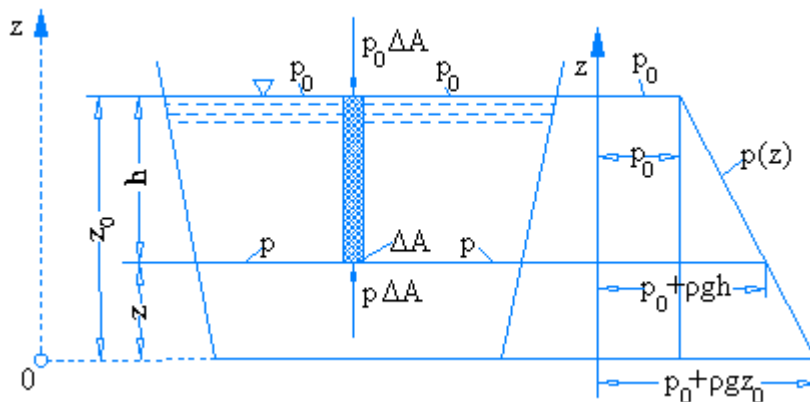
2.3.2 Osnovna jednadžba hidrostike

Za nestišljivu tekućinu, prema jednadžbi 2.9b, dobiva se:

$$p + \rho g z = \text{konst.}, \quad p = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho g h \quad (\rho = \text{konst.}) \quad (2.11a,b,c)$$

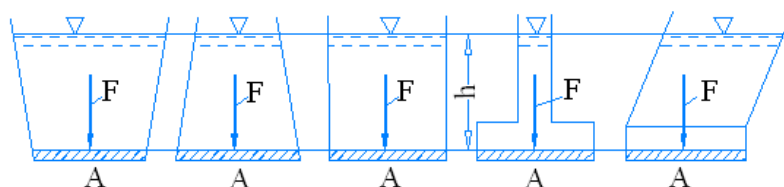
Primjenom koordinatnog sustava sa slike 2.6, gdje z_0 označava vertikalnu udaljenost do slobodnog vodnog lica na kome vlada atmosferski tlak $p = p_0$, u točki određenoj sa koordinatama x, y, z vlada tlak sa vrijednosti $p = p_0 + \rho g h$. Dubina h je definirana sa $h = z_0 - z > 0$.

Iz izraza 2.11 razvidno je da se hidrostatski tlakovi mijenjaju po linearnom zakonu te da rastu sa povećanjem dubine. Nadalje, u svim točkama koje se nalaze u horizontalnoj ravnini na nekoj dubini h djeluje jednaki tlak.



Slika 2.6 – prikaz ravnoteže sila na jednom stupcu tekućine

Prema slici 2.7 može se uočiti da su sile tlakova koje se pojavljuju na dno posuda istih površina A jednake usprkos različitim oblicima bočnih kontura posude, te da su tlakovi na dnu posuda jednaki ukoliko je u svim posudama razina vodnog lica u istoj horizontalnoj ravnini. Prema tome sila tlaka na dno može biti manja ili veća od ukupne težine tekućine koja se nalazi u posudi. Ova činjenica naziva se hidrostatski paradoks.



Slika 2.7 – Sile tlakova na dno posuda različitih oblika bočnih kontura pri jednakim razinama vodnog lica od dna

2.3.3 Ekvipotencijale

U općem slučaju su tlakovi p na različitim položajima unutar prostora ispunjenog tekućinama različiti. Ako se zamisli površina koja povezuje sve točke prostora unutar promatranog volumena u kojima vlada tlak istog intenziteta dobiva se tzv. ekvipotencijalna ploha. Kroz svaku točku prostora unutar promatranog volumena prolazi samo jedna ekvipotencijalna ploha, što slijedi i iz prijašnje konstatacije. Isto tako ekvipotencijalna ploha odgovara plohi na kojoj se nalaze točke istog potencijala masenih sila ($u_B = \text{konst.}$). Činjenica da se pri prelasku od jedne do druge točke na istoj ekvipotencijal pređe put ds ali da se pri tome potencijal masenih sila ne mijenja ($du_B = 0$) vodi i do slijedeće jednakosti:

$$du_B = \text{grad } u_B \cdot ds = -f_B \cdot ds = 0, \quad u_B = \text{konst.} \quad (2.12a,b)$$

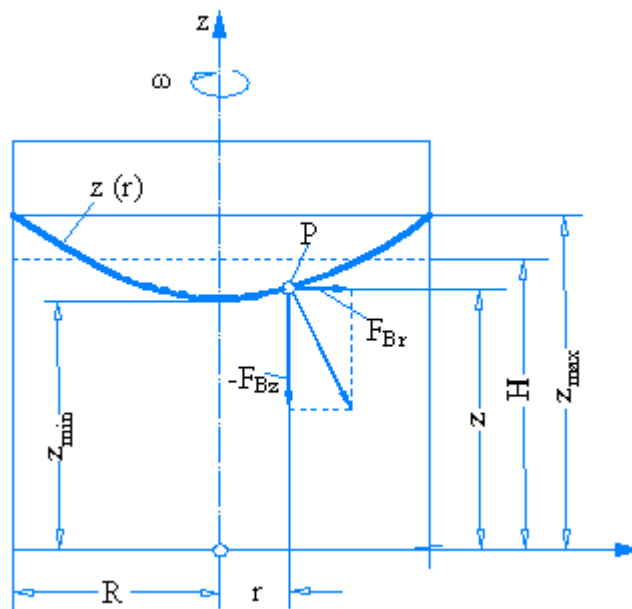
Skalarni produkt vektora $f_B \cdot ds$ je jednak nuli ukoliko je vektor masenih sila f_B okomit na ds a što znači da je i ekvipotencijalna ploha u svakoj točki tekućine okomita na smjer vektora vladajuće masene sile. Isto pravilo naravno vrijedi i za slobodnu površinu na kojoj vlada atmosferski tlak. U još poopćenijem smislu može se zaključiti da, na kontaktnoj plohi između dvije međusobno ne miješajuće tekućine, «gornja» tekućina na kontaktu sa «doljnjom» tekućinom djeluje sa tlakom koji vlada u «gornjoj» tekućini.

Ukoliko od masenih sila djeluje samo sila gravitacionog ubrzanja usmjerena vertikalno prema «dolje», ekvipotencijale su položene horizontalno i međusobno su paralelne. U slučaju učešća i centrifugalne sile, kao u slučaju rotirajuće posude (oko vertikalne simetralne osi), ekvipotencijale poprimaju zakrivljenu formu. Na slici 2.8 prikazana je cilindrična posuda radijusa R koja se rotira sa jednolikom kutnom brzinom ω oko vertikalne osi i koja je prije početka rotacije bila ispunjena sa homogenom kapljevnom do visine H . Tekućina se na kontaktnoj plohi sa konturama posude kreće jednakom apsolutnom brzinom kao i točke na konturi posude, no promatrano u relativnom sustavu

posude koji se rotira zajedno sa posudom, tekućina miruje (nema promjene udaljenosti između bilo koje dvije točke tekućine).

Jednadžbu za proračun vodnog lica $z(r)$ dobiva se iz uvjeta (2.12b) da potencijal masenih sila $u_B(r,z)$ u točki $P(r,z)$ mora biti konstantan. Ukoliko se za najnižu točku u osi rotacije ($r = 0$) definira $z_{min} = z(r = 0)$ onda se kontinuirana krivulja vodnog lica u vertikalnom presjeku kroz središte rotacije može definirati na slijedeći način:

$$z(r) = z_{min} + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad sa \quad z_{min} = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad (2.13a,b)$$



Slika 2.8 - cilindrična posuda radijusa R koja se rotira sa jednolikom kutnom brzinom ω oko vertikalne osi i koja je prije početka rotacije bila ispunjena sa homogenom kapljevinom do visine H

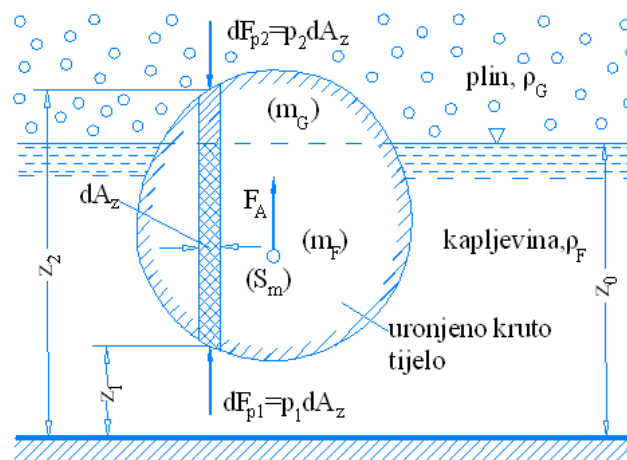
Krivulja vodnog lica dobivena u vertikalnoj ravnini je parabola a površina vodnog lica u 3D prikazu ima formu rotacionog paraboloida. Za potpuno određivanje $z(r)$ potrebno je i poznavanje z_{min} a čija vrijednost se dobiva na temelju jednakosti volumena kapljevine u posudi prije i za vrijeme rotacije.

2.3.4 Hidrostatski uzgon (Arhimedov zakon)

Čvrsti tijelo proizvoljnog oblika prikazano na slici 2.9 djelomično je uronjeno u kapljevinu sa gustoćom ρ_F a dijelom se nalazi u kontaktu sa plinom gustoće ρ_G . Po cijelom oplošju tijela djeluju sile tlaka a rezultanta njihovog djelovanja označena je sa vektorom F_P . Obzirom da su ekvipotencijale horizontalne ravnine, komponenta rezultantne sile tlaka F_P u horizontalnom smjeru

F_{Px} je 0. Prema tome rezultantna sila tlaka F_P sačinjena je samo od vertikalne komponente $F_{Py} = F_A$ koja se naziva uzgonska sila. Sila tlaka na infinitezimalnu površinu tijela dobiva se umnoškom $dF_P = -pdA$. Dvije površine dA_1 i dA_2 koje se nalaze na nekoj vertikalnoj udaljenosti i koje imaju jednake površine njihovih projekcija dA_z u horizontalnoj x - y ravnini imati će doprinos ukupnoj uzgonskoj sili sa vrijednosti $dF_A = dF_{P1} - dF_{P2}$. Korištenjem jednadžbe 2.10c dobiva se i slijedeća jednadžba kojom se definira razlika sile tlaka «iznad» i «ispod» tijela:

$$dF_A = (p_1 - p_2)dA_z \quad \text{sa} \quad p_1 - p_2 = g \int_{z_1}^{z_2} \rho dz \geq 0$$



Slika 2.9 – hidrostatski uzgon pri djelomično uronjenom tijelu

Na slici 2.9 prikazan je slučaj djelomično uronjenog tijela pa za $z_0 \leq z \leq z_2$ gustoća plina je $\rho = \rho_G$ dok je za $z_1 \leq z \leq z_0$ gustoća kapljevine $\rho = \rho_F$. Nakon integracije dobiva se ukupna sila uzgona sa smjerom djelovanja vertikalno prema gore:

$$F_A = g \int_{(V)} \rho dV = g(m_G + m_F)F_{BG} + F_{BF} \quad (2.14a,b)$$

Obzirom da je $\rho_G \ll \rho_F$, masa plina m_G i pripadna težina plina F_{BG} se zanemaruju. Jednadžba 2.14 je matematička formulacija Arhimedov-og zakona koji kaže da tijelo prividno izgubi na svojoj težini koliko teži istisnuta tekućina. Hvatište sile uzgona pada u točku težišta tijela.

2.4 Tlak kapljevine na čvrste površine

2.4.1 Sila tlaka na ravne površine

Primarna zadaća hidrostatičke je određivanje prostorne raspodjele vrijednosti sile tlaka dF_p (na infinitezimalnu površinu dA) te integracija po cjelokupnoj površini A za koju se želi odrediti ukupna sila tlaka F_p . Osnovne jednačbe glase:

$$dF_p = -pdA, \quad F_p = - \int_{(A)} pdA \quad \text{sa} \quad p = p_0 + \rho g(z_0 - z) \quad (2.15a,b,c)$$

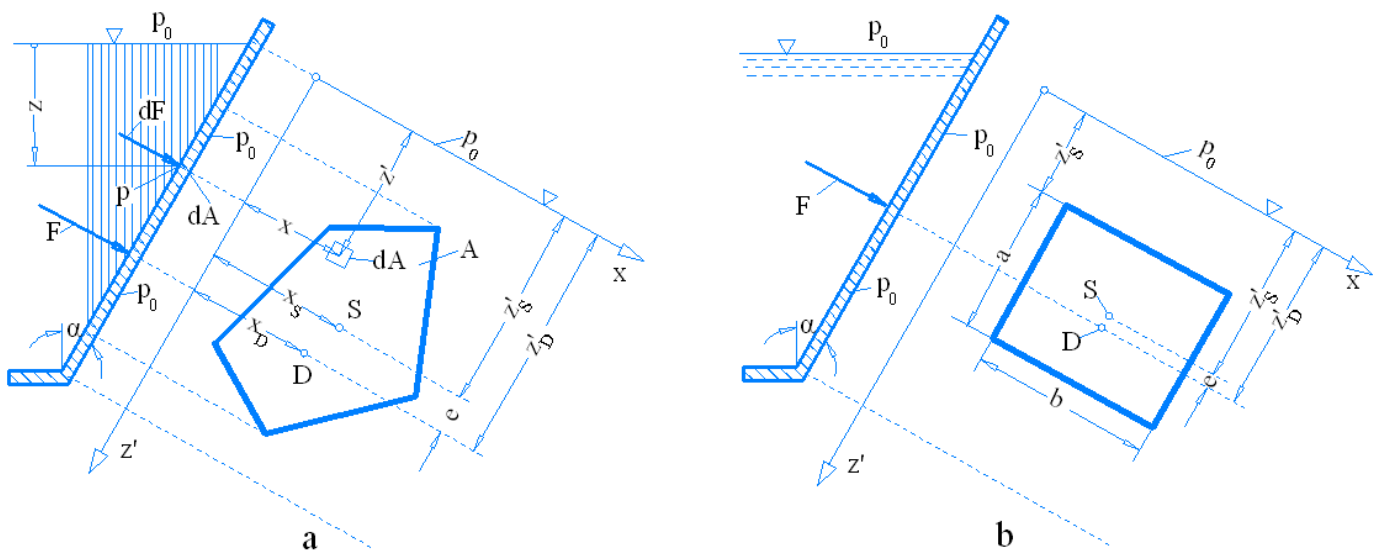
gdje je:

p_0 – tlak na vodnom licu koje se poklapa sa apcismom koordinatnog sustava (vodno lice = z_0)

p – tlak na proizvoljnoj dubini $-z$

Raspodjela tlakova po konturi prikazanoj na slici 2.10 dobiva se uz pomoć prevanjenog koordinatnog sustava $x-z'$, povezanog sa referentnim sustavom temeljem odnosa $z = z' \cos \alpha > 0$, te primjenom jednačbe 2.15c i usvajanjem $z_0 = 0$:

$$p = p_0 + \rho g z = p_0 + \rho g z' \cos \alpha \geq 0 \quad (z, z' \geq 0) \quad (2.16a,b)$$



Slika 2.10 – raspodjela tlakova i rezultantna sila tlaka na dio čvrste površine posude (A) u kojoj se nalazi kapljevina u mirovanju (a-proizvoljna površina ; b-pravokutna površina)

Sila tlaka dF_P na infinitezimalnu površinu dA definirana je jednadžbom 2.15a. Za koordinatni sustav $x-z'$ dobiva se $dF = \rho g z' \cos \alpha dA$ (oznaka za silu tlaka F_P zamijenjena je sa oznakom F bez indeksa « p » a u nastavku će se također ispustiti indeksna oznaka). Integracijom po površini A dobiva se i ukupna sila tlaka:

$$F = \rho g z'_S \cos \alpha A = (p_S - p_0) A \quad \text{sa} \quad z'_S = \frac{1}{A} \int_{(A)} z' dA \quad (2.17a,b,c)$$

gdje je:

z'_S – udaljenost točke težišta površine A od $z' = 0$ u ravnini $x-z'$

p_S – tlak u točki težišta površine A

Izraz 2.17b ustvari pokazuje da je resultantna sila tlaka F na površinu A jednaka umnošku površine A i razlike tlakova ($p_S - p_0$). Obzirom da tlak nije jednoliko raspodijeljen po cijeloj površini A nego se linearno povećava sa povećanjem dubine z odnosno z' , točka hvatišta rezultante ne prolazi kroz točku težišta S površine A nego kroz točku D sa koordinatama x_D, z'_D (vidi sliku 2.10). Kako bi se odredio položaj točke $D(x_D, z'_D)$ potrebno je iskoristiti jednadžbu ravnoteže momenata oko x i z' osi:

$$z'_D = \frac{1}{F} \int_{(A)} z' dF = \frac{I_{xz'}}{Az'_S}, \quad z'_D = \frac{1}{F} \int_{(A)} x dF = \frac{I_{xx}}{Az'_S} \quad (2.18a,b)$$

gdje je:

I_{xx} – moment tromosti (inercije) površine A oko osi x

$I_{xz'}$ – centrifugalni moment površine A oko osi x i z'

$$I_{xx} = \int_{(A)} z'^2 dA, \quad I_{xz'} = \int_{(A)} x z' dA \quad (2.19a,b)$$

Prema Steiner-ovom stavku za momente tromosti površina vrijedi $I_{xx} = I_S + A (z'_S)^2$ u kojem I_S ima značenje momenta tromosti oko osi paralelne sa x a koja prolazi kroz težište S površine A . Ukoliko se taj stavak primijeni na jednadžbu 2.18a dobivaju se jednadžbe za određivanje udaljenosti e između hvatišta sile tlaka (točka D) od težišta površine A :

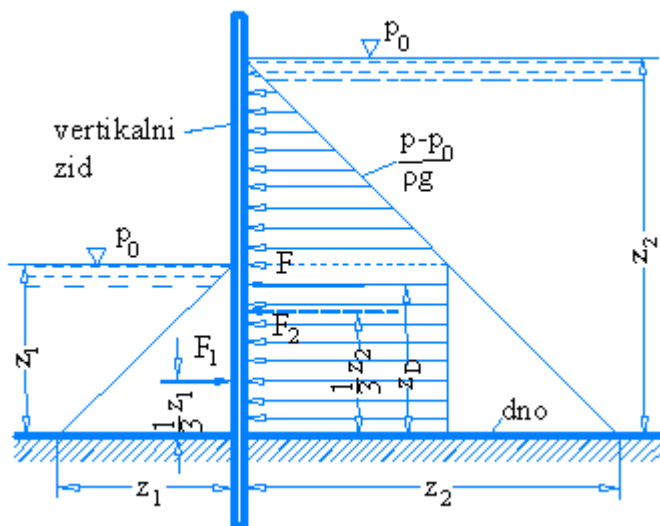
$$e = z'_D - z'_S = \frac{I_S}{Az'_S} \geq 0 \quad \text{sa} \quad I_S = \int_{(A)} (z' - z'_S)^2 dA \quad (2.20a,b)$$

Obzirom da su I_S i z_S' uvijek pozitivni, i e uvijek ima pozitivnu vrijednost što znači da je točka hvatišta sile tlaka D uvijek ispod točke težišta S površine A .

Na slici 2.10b prikazan je i slučaj jednostavnije geometrije površine A . Korištenjem gore navedenih jednadžbi i uvrštavanjem odgovarajućih vrijednosti u njih dobiva se odnos $e = a/6$. Za horizontalnu površinu A koja se nalazi na dnu ($\alpha = 0$) sila tlaka iznosi $F = (p_0 + \rho gh)A$.

Vertikalni zid širine b prikazan na slici 2.11 razdjeljuje tekućine iste gustoće koje su u mirovanju i imaju različite razine slobodne površine ($z_1 \neq z_2$) na lijevoj i desnoj strani. Na lijevu stranu zida djeluje ukupna sila tlaka $F_1 = \rho g z_1^2 b/2$ sa hvatištem na vertikalnoj udaljenosti $z_1/3$ od dna. Na desnu stranu zida djeluje ukupna sila tlaka $F_2 = \rho g z_2^2 b/2$ sa hvatištem na vertikalnoj udaljenosti $z_2/3$ od dna. Vrijednosti resultantne sile tlaka na vertikalni zid F i udaljenosti njenog hvatišta od dna z_D proračunavaju se korištenjem jednadžbe 2.21, pri čemu se z_D dobiva iz jednadžbe momenata $z_D F = (z_2/3)F_2 - (z_1/3)F_1$.

$$F = \rho g = \frac{1}{2} b (z_2^2 - z_1^2), \quad z_D = \frac{1}{3} \frac{z_2^3 - z_1^3}{z_2^2 - z_1^2} \quad (2.21a,b)$$



Slika 2.11 – hidrostatska sila tlaka na vertikalni zid pri različitim razinama slobodne površine na lijevoj i desnoj strani

2.4.2 Sila tlaka na zakrivljene površine

Promatra se čvrsta zakrivljena ploha sa površinom A koja je dio čvrstog zida na kontaktu sa homogenom tekućinom gustoće ρ u mirovanju (slika 2.12). Resultantna sila tlaka tekućine na površinu A iznosit će (prema 2.15b):

$$F = \int_{(A)} (p - p_0) dA = \rho g \int_{(A)} z dA \quad (2.22a,b)$$

gdje je:

$(p - p_0)$ – tlak tekućine prema 2.16a

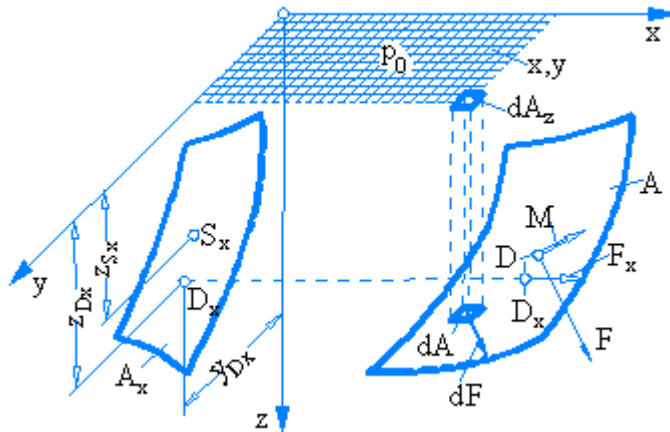
dA – usmjerena površina sa pozitivnim smjerom vanjske normale prema unutrašnjosti posude odnosno tekućini

U pravokutnom koordinatnom sustavu x - y - z za vrijednosti komponente sile tlaka dobivaju se slijedeće jednačbe:

$$F_x = \rho g \int_{(A_x)} z dA_x, \quad F_y = \rho g \int_{(A_y)} z dA_y, \quad F_z = \rho g \int_{(A_z)} z dA_z, \quad (2.23a,b,c)$$

gdje je:

A_x, A_y, A_z – projekcija površine A na y - z (-), x - z (-) i x - y ravninu



Slika 2.12 – zakrivljena ploha sa površinom A koja je dio čvrstog zida na kontaktu sa homogenom tekućinom gustoće ρ u mirovanju u x - y - z koordinatnom sustavu

U općem slučaju proizvoljne zakrivljene površine A , komponente sile tlaka F_x, F_y, F_z prolaze kroz istu točku, no uz pomoć metode prostornog poligona sila komponentne sile se mogu svesti na jednu silu F i jedan moment M . U slučaju zakrivljenih površina koje imaju cijelu površinu A u obliku segmenta kugle sve komponentne sile tlaka F_x, F_y, F_z prolaze kroz istu točku a to je središte radijusa zakrivljenosti kugle odnosno njeno središte.

Sa z_{Sx} označena je udaljenost od slobodne površine do težišta projekcijske površine A_x u y - z (-) ravnini. Vrijednost pripadne horizontalne komponente sile tlaka F_x dobiva se prema jednadžbi 2.23a $F = F_x$, $\alpha = 0$ i $z_{S'} = z_{Sx}$. Točka D_x sa koordinatama y_{Dx} , z_{Dx} je hvatište sile F_x u y - z (-) ravnini a koordinate y_{Dx} i z_{Dx} određuju se analogno jednadžbi 2.18 sa:

$$F_x = \rho g z_{Sx} A_x, \quad z_{Dx} = \frac{I_{yy}}{A_x z_{Sx}}, \quad y_{Dz} = \frac{I_{yz}}{A_x z_{Sx}} \quad (2.24a,b,c)$$

gdje je:

I_{yy} – moment tromosti površine A_x oko y osi

I_{yz} – centrifugalni moment površine A_x oko y i z osi

Na isti način dobiva se i komponentna sila tlaka F_y . Stoga se može zaključiti da horizontalna sila tlaka F_{xy} kojom tekućina u mirovanju djeluje na proizvoljnu zakrivljenu površinu A po vrijednosti odgovara sumi sila tlakova $F_x + F_y$ na projekcijske površine A_x i A_y u y , z (-) i x - z (-) ravnini.

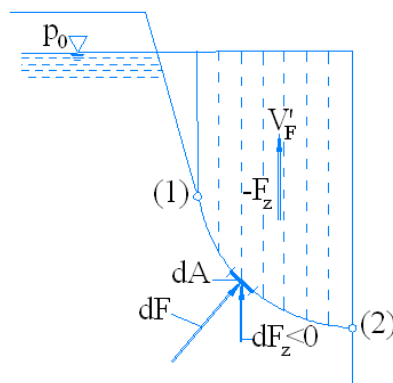
Vertikalna komponenta F_z ukupne sile tlaka F na površinu A dobiva se prema 3.11c (slika 2.12):

$$F_z = \rho g \int_{(Az)} z dA_z = \rho g V_F \quad (2.25a,b)$$

gdje je:

V_F – volumen stupca kapljevine iznad cijele površine A do ravnine slobodne površine

$\rho g V_F$ – težina stupca kapljevine iznad cijele površine A do ravnine slobodne površine



Slika 2.13 – slikovni prikaz vertikalne komponente F_z od resultantne hidrostatske sile tlaka F na segment zakrivljene površine od točke 1 do točke 2

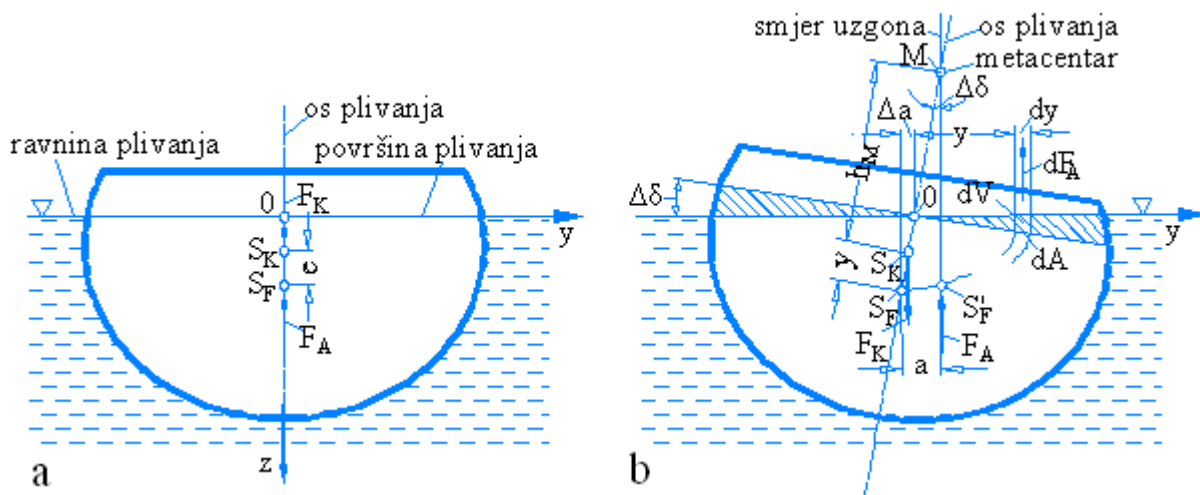
2.4.3 Plivajuće kruto tijelo

Prema Arhimedovom zakonu sila hidrostatskog uzgona jednaka je težini istisnute tekućine odnosno težini tekućine koja zamišljeno ispunjava volumen uronjenog tijela unutar njegove konture do razine slobodne površine. Ne treba smetnuti sa uma da je hidrostatski uzgon ustvari samo rezultanta hidrostatskih sila tlaka na konture uronjenog tijela a ne neka posebna sila. Da kruto tijelo može ostvariti stabilno plivanje (djelomično uranjanje) ono mora zadovoljiti nekoliko uvjeta.

Prvi uvjet je uvjet ravnoteže odnosno da se pri djelomičnom uranjanju krutog tijela aktivira hidrostatski uzgon F_A po smjeru suprotan od smjera vektora težine krutog plivajućeg tijela F_K i po veličini jednak težini krutog plivajućeg tijela $F_A = F_K$ odnosno:

$$F_A = g\rho_F V_F = F_K, \quad V_F = \frac{\rho_K}{\rho_F} V_K \quad (2.26a,b)$$

Djelomična uronjenost može se ostvariti samo ukoliko je $\rho_F > \rho_K$ budući da su volumeni pri djelomičnom uranjanju krutog tijela u odnosu $V_F < V_K$. U suprotnom dolazi do tonjenja krutog tijela.



Slika 2.14 – ravnoteža pri plivanju krutog tijela

Pri promjeni odnosa sila u smjeru $F_A < F_K$ dolazi do tonjenja i obratno. Na temelju jednadžbe 2.26b može se odrediti i dubina do koje će se tijelo uroniti kako bi se zadovoljio uvjet ravnoteže. Primjerice za kvadar s dimenzijom duljine a , širine b i visine c dobiva se dubina uranjanja $t = (\rho_K / \rho_F) c$.

Drugi uvjet je uvjet stabilnosti odnosno «održavanja» stabilne ravnoteže i pri rotaciji vertikalne simetrane poprečnog presjeka. U nastavku ovog poglavlja provedena analiza odnosi se na slučaj malih pomaka odnosno kuta zaokreta simetrane poprečnog presjeka a vjetrovni «nagli» udari i posljedične oscilacije uronjenog tijela nisu analizirani.

Pri potpuno uronjenom tijelu stabilna ravnoteža je ostvariva samo ukoliko je težište uronjenog tijela S_K iznad težišta uzgona S_F . U slučaju djelomično uronjenog (plutajućeg) tijela prvi uvjet ravnoteže izražen jednadžbom 2.26a još uvijek nije dovoljan za stabilno plivanje. Dodatni uvjet koji mora biti zadovoljen je taj da sile F_K i F_A ne smiju tvoriti moment koji će «preokrenuti» plutajuće tijelo. Dodatni uvjet bit će zadovoljen ukoliko je dužina koja povezuje točke S_K i S_F (tzv. os plivanja – z os) vertikalna. Pri povećanju težine plutajućeg tijela doći će i do dodatnog uranjanja i obratno. S druge strane od inženjerskog interesa je provjeriti stabilnost pri malim poremećajima pri kojima dolazi do promjene u ravnotežnom položaju. Provjera stabilnosti svodi se na analizu da li će i nakon prekida poremećaja plutajuće tijelo biti samo u stanju vratiti se u prvobitni položaj prije nastupa poremećaja. Iz mehanike su poznati pojmovi stabilne, labilne i indiferentne ravnoteže. Za konkretan slučaj da se plivajuće tijelo nalazi u stabilnoj ravnoteži znači da se po prekidu poremećaja tijelo vraća u prvobitni položaj, u labilnoj ravnoteži je ukoliko dolazi do prevrtanja plivajućeg tijela a slučaj indiferentne ravnoteže značio bi da plivajuće tijelo zadržava stanje ravnoteže koje je nastupilo uslijed poremećaja i nakon prekida djelovanja poremećaja.

Na slici 2.14a prikazano je djelomično uronjeno i plivajuće kruto tijelo. Ravnina plivanja je ona horizontalna x - y ravnina koja se poklapa sa ravninom slobodne površine tekućine a horizontalni presjek ravnine plivanja kroz konture plivajućeg tijela naziva se površina plivanja. Točka «0» nalazi se na presjeku osi plivanja i površine plivanja. Volumen istisnute tekućine označen je sa oznakom V_F . Za ispitivanje stabilnosti zamišlja se plutajuće tijelo koje uslijed poremećaja ostvaruje malu rotaciju sa kutom $\Delta\delta$ oko uzdužne x os (normala na y - z ravninu) koja prolazi kroz točku «0» (slika 2.14b). Sa dA označen je proizvoljna infinitezimalna površina plivanja na udaljenosti y od osi rotacije «0» a sa $dV=y\Delta\delta dA$ pripadni volumen. Pri $y>0$ sila uzgona je $dF_A = \rho_F g dV = \rho_F g y \Delta\delta dA >0$ odnosno pri $y<0$ sila uzgona je $dF_A = \rho_F g dV = \rho_F g y \Delta\delta dA <0$. Promjena u ukupnoj sili uzgona za cijelo plivajuće tijelo ΔF_A dobiva se sa integracijom po cijeloj, oko x osi, simetričnoj površini plivanja A ($x, y, z = 0$). Jasno je da vrijednost ΔF_A mora biti 0 kako bi se zadržao uvjet ravnoteže sila težine tijela i njemu suprotstavljenog uzgona. Ipak, dolazi do promjene položaja hvatišta sile uzgona relativno na plutajuće tijelo. Uzgonska sila F_A sada prolazi kroz novo težište S_F' koje je mjerodavno za novi položaj plivajućeg tijela. Sve dok je nastali spreg sila F_K i F_A takav da je njihov

moment suprotan smjeru rotacije broda, nakon prestanka djelovanja poremećaja plivajuće tijelo vratiti će se u prvobitni položaj definiran sa slikom 2.14.

Kako bi se odredio položaj točke «M» koja se nalazi na sjecištu osi plivanja i smjera djelovanja uzgona potrebno je odrediti i horizontalnu udaljenost a između točaka S_F' i S_F . Upotrebom jednadžbe ravnoteže momenata oko osi kroz S_F i horizontalnih pomaka Δa od S_F dobiva se:

$$F_A a = \int_{(A)} (\Delta a + y) dF_A = g \rho_F I_0 \Delta \delta \quad \text{sa} \quad \Delta F_A = 0 \quad \text{i} \quad I_0 = \int_{(A)} y^2 dA$$

gdje I_0 predstavlja moment tromosti plivajuće površine u odnosu na os rotacije (x os kroz točku «0»). Prema slici 2.14b i jednadžbi 2.26a slijedi:

$$a = (h_M + e) \Delta \delta = \frac{I_0}{V_F} \Delta \delta, \quad h_M = \frac{I_0}{V_F} - e \quad (\text{stabilno, } h_M > 0) \quad (2.27a,b)$$

gdje je:

h_M – udaljenost na osi plivanja između točke M (metacentar) i točke S_K

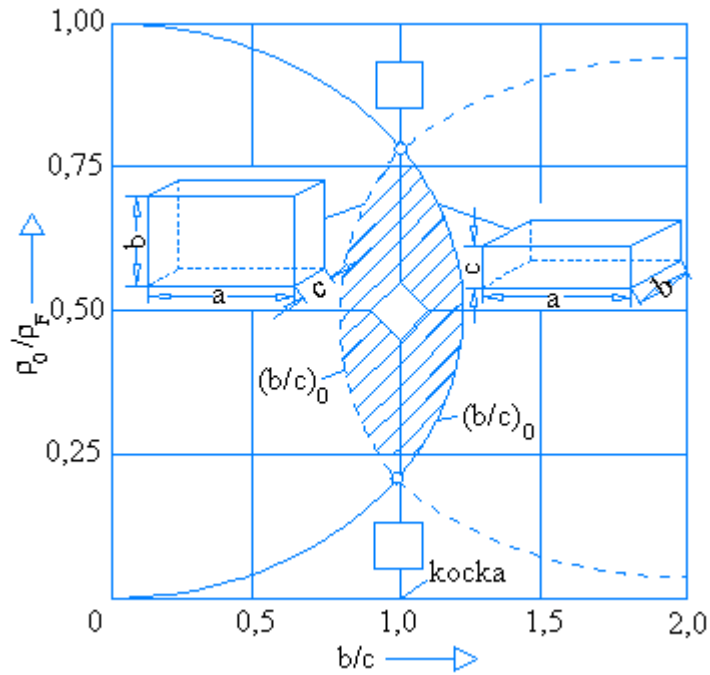
Potrebno je napomenuti da za rotaciju oko y osi postoji druga točka metacentra.

Pri malim kutovima zaokreta h_M je neovisan od $\Delta \delta$ dok to pri većim kutovima nije slučaj. S druge strane h_M ovisi i o polarnom momentu I_0 površine plivanja, o istisnutom volumenu tekućine V_F i o udaljenosti točaka S_K i S_F ($e > 0$) pa pri promjeni dubine uranjanja mijenja se i h_M . Za $h_M > 0$ spreg sila F_A i F_B omogućuje zaokret u početni položaj sa slike 2.14 odnosno omogućuju stabilnu ravnotežu.

Za tijelo sa slike provjerava se slučaj stabilnosti plivanja krutog tijela sa duljinama stranica za koje vrijedi $a \gg b$ tako da se tijelo može rotirati oko x -osi paralelno postavljenoj prema stranici a . Prema izrazu 2.27b dobivaju se vrijednosti za $I_0 = ab^3/12$, $V_F = abt$ i $e = (c-t)/2$ sa dubinom uranjanja $t = (\rho_K/\rho_F)c$. Time su mogu odrediti i slijedeći odnosi:

$$\frac{h_M}{c} = \frac{1}{12} \frac{\rho_F}{\rho_K} \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho_F}\right), \quad \frac{b}{c} \geq \left(\frac{b}{c}\right)_0 = \sqrt{6 \frac{\rho_K}{\rho_F} \left(1 - \frac{\rho_K}{\rho_F}\right)} \quad (2.28a,b)$$

Izraz 2.28b predstavlja uvjet stabilnosti ($h_M > 0$) pri kojem se rub c nakon jednog malog poremećaja ravnoteže oko x -osi ponovno vraća u prvobitni položaj, okomito na slobodnu površinu u x - y ravnini



Slika 2.15 – krivulje stabilnosti $(b/c)_0$ djelomično uronjenog kvadra - šrafirana površina je područje labilnog plivanja ($b/c > (b/c)_0$ – puna linija ; $b/c < (b/c)_0$ – iscrtkana linija)

Na slici 2.15 dan je prikaz granica krivulje stabilnosti $(b/c)_0$ za $h_M = 0$ u ovisnosti od $0 \leq \rho_K / \rho_F \leq 1$. U područje izvan pune krivulje $b / c > (b / c)_0$ vrijedi stabilno plivanje a unutar krivulje labilno. Pri promatranju plivajućeg tijela sa okrenutim stranicama za $\pi / 2$ (na slici 2.15 lijevo ucrtano tijelo) potrebno je u izrazu 2.28 samo zamijeniti vrijednosti b i c a pripadna krivulja stabilnosti dana je na slici 2.15 sa iscrtkanom linijom. Izvan iscrtkane krivulje u području $b / c < (b / c)_0$ vrijedi stabilno plivanje a unutar krivulje labilno.

3 Kinematika

3.1 Uvod

Kao i u klasičnoj mehanici, i u mehanici tekućina postoji podjela na statiku (Hidrostatiku), kinematiku i dinamiku. U hidrostatici proučavalo se ponašanje tekućina u mirovanju, apsolutnom i relativnom. U kinematici se proučava ponašanje tekućine u kretanju bez analize uzročnika njezinog kretanja odnosno sila. Osnovne kinematske fizikalne veličine su put (duljina) i vrijeme a kao krajnji cilj kinematike je određivanje polja brzina (put/vrijeme) i polja ubrzanje (brzina/vrijeme) te deformacija. Transportni teoremi odnosno jednačbe pronosa ili zakon očuvanja polja u osnovi pripadaju području kinematike zbog čega će o njima i biti riječ u ovom poglavlju a korištenjem pojedinih polja u tim teoremima odnosno jednačbama dobivati će se pojedini zakoni koji po svom smislu pripadaju području dinamike (hidrodinamike) te će se tretirati u narednim poglavljima.

3.1 Pristup u opisivanju tečenja tekućina

Za kinematski opis tečenja dovoljno je odrediti polja brzine i ubrzanja a koja su definirana kada su u svakom trenutku i u svakoj točki prostora definirani vektori brzine i ubrzanja. Za dinamički opis tečenja potrebno je definirati i polja sila (volumnih i površinskih).

Postoje dva različita pristupa u opisivanju tečenja. U Lagrange-ovom opisu zamišlja se proizvoljno velik skup točaka odnosno djelića tekućine koji je izložen djelovanjima i ograničenjima od okoline kroz koju se kreće. Pri takvom supstancijalnom promatranju svakom djeliću ili skupu djelića tekućine dodjeljuje se vektor položaja \mathbf{r}_L , primjerice u trenutku $t = 0$, a trenutni položaj (koordinate) \mathbf{r} u nekom trenutku $t \neq 0$ definiran je kao funkcija od \mathbf{r}_L i t .

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{r}_L), \quad E = E(t, \mathbf{r}_L) \quad (3.1a,b)$$

Budući da je izraz 1.42a važeći i za fizikalnu veličinu E , poput brzine, tlaka ili temperature slijedi i izraz 3.1b. Veličine \mathbf{r}_L i t su neovisne i promjenljive varijable dok je \mathbf{r} ovisna i promjenljiva varijabla. Ovaj pristup je posebno prihvatljiv ukoliko se prate karakteristike točno određenog skupa djelića tekućine kao fizičke cjeline poput vrtloga.

Eulerov pristup baziran je na određivanju vrijednosti neke fizikalne veličine E u svakoj točki prostorne domene strujnog polja a određenoj sa prostornim vektorom \mathbf{r} položaja (sa fiksnim prostornim ishodištem ili ishodištem u čvrstom tijelu koje miruje tijelu) u nekom trenutku t . Kod takvog lokalnog promatranja fizikalna veličina E je funkcija vremena t i položaja \mathbf{r} .

$$E = E(t, \mathbf{r}) \quad (3.1c)$$

Primarni interes je praćenje promjene fizikalne veličine u vremenu pa između Lagrange-ovog i Euler-ovog pristupa vrijedi odnos:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{Lagrange} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{Euler} = \frac{dE}{dt} \quad (3.1d)$$

gdje je.

$\partial E / \partial t$ – parcijalna derivacija po vremenu pri $\mathbf{r}_L = \text{konst.}$ (vremenska promjena fizikalne veličine E za fluidni djelić markiran sa \mathbf{r}_L)

dE / dt – totalna-supstancijalna derivacija po vremenu (vremenska promjena fizikalne veličine E koji se u nekom trenutku nalazi u položaju definiranim sa \mathbf{r}) sadržana od parcijalne promjene po vremenu na fiksiranom položaju ($\mathbf{r} = \text{konst}$) i parcijalne promjene po prostoru (pri $t = \text{konst}$)

Prostorna domena u kojoj se analizira tečenje naziva se i strujno polje a pripadne fizikalne veličine poput brzine, tlaka ili temperature kojima se поближе opisuju karakteristike strujnog polja također predstavljaju polja (polje brzina, polje tlakova, polje temperatura ...)

Ukoliko nema promjena fizikalnih veličina u strujnom polju tijekom vremena strujno polje je stacionarno. Ukoliko uz to ne postoje ni promjene fizikalnih veličina po prostornim koordinatama strujnog polja, strujno polje je jednoliko i stacionarno.

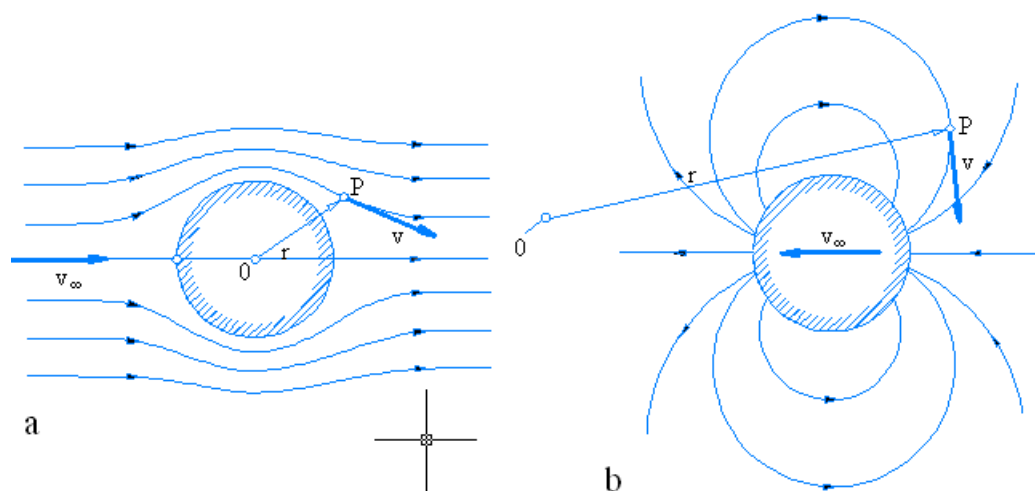
3.3 Kinematske fizikalne veličine

3.3.1 Polje brzina

U jednom određenom vremenskom trenutku svaki djelić tekućine, koji se zamišlja proizvoljno malenim u smislu mehanike kontinuuma, ima određenu brzinu. U općenitom slučaju različiti djelići imat će i različite brzine \mathbf{v} (po smjeru i intenzitetu) što znači da je brzina kao fizikalna veličina

vektor a polje brzina je vektorsko polje. Ukoliko se jednom djeliću tekućine u određenom vremenu t dodjeli vektor položaja \mathbf{r} koji povezuje točku ishodišta referentnog koordinatnog sustava i položaja odabranog djelića tekućine, polje brzina bit će u potpunosti definirano ukoliko su poznate vrijednosti $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ za svaku točku tekućine unutar odabrane prostorne domene.

Ukoliko je vektor brzine $\mathbf{v} = \text{konst.}$ po veličini i po smjeru nepromjenjiv govori se o jednolikom translatorskom tečenju. Ukoliko je vektor brzine \mathbf{v} u bilo kojoj točki prostora definiranoj sa vektorom položaja \mathbf{r} neovisan o vremenu t ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$) govori se o stacionarnom tečenju. U drugom slučaju u kojem je vektor brzina funkcija i položaja i vremena $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ govori se nestacionarnom tečenju.



Slika 3.1- opstrujavanje idealne tekućine oko čvrstog cilindričnog tijela sa kružnim poprečnim presjekom (a - ishodište koordinatnog sustava u središtu presjeka cilindra ; b - ishodište koordinatnog sustava u proizvoljnoj točki prostora)

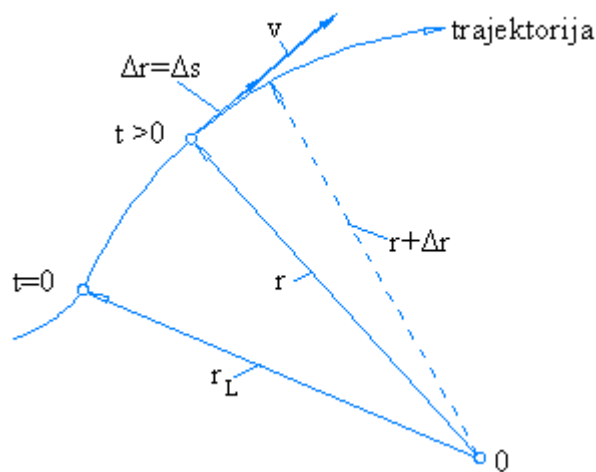
Jedan primjer stacionarnog tečenja dan je i na slici 3.1a na kojoj je prikazano opstrujavanje idealne tekućine oko prostorno fiksiranog i čvrstog cilindričnog tijela (kružni poprečni presjek u prikazanoj ravnini papira) sa homogenim profilom brzina pristrujavanja \mathbf{v}_∞ . Ishodište odabranog koordinatnog sustava je fiksno i nalazi se u točki «0» a u proizvoljno odabranoj točki P vektor brzinama $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}_P)$ ima konstantan smjer i intenzitet u vremenu. Na slici 3.1b dan je primjer nestacionarnog tečenja inicijalno mirujuće tekućine u okolini čvrstog cilindričnog tijela koje se giba sa brzinom \mathbf{v}_∞ . Ishodište odabranog koordinatnog sustava je fiksno i nalazi se u točki «0». U ovom slučaju je brzina u fiksnoj točki P definirana sa $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}_P)$ odnosno mijenja se u vremenu po smjeru i intenzitetu. Prema tome, odabir položaja ishodišta koordinatnog sustava (fiksiranog u točki cilindra – slika 3.1a ili fiksiranog u točki prostora – slika 3.1b) odlučuje o tome da li će tečenje biti karakterizirano kao stacionarno ili nestacionarno. Potrebno je skrenuti pažnju da ukoliko se promatra slučaj sa slike 3.1b (tekućina u mirovanju a kretanje cilindra sa brzinom $\mathbf{v}_\infty = \text{konst}$) ali ishodište koordinatnog

sustava se zajedno sa promatračem postavi u središte presjeka cilindra, promatrač će opažati stacionarno polje brzina.

3.3.2 Kinematski pojmovi uz opis tečenja

Djelić tekućine pri tečenju u vremenu dt prewali put ds (vidi sliku 3.2) koji se u kartezijskom koordinatnom sustavu može izraziti i preko prostornih komponenti dx , dy , dz odnosno sa indeksnom notacijom sa dx_i .

$$ds = v dt, \quad dx_i = v_i dt \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2a, b)$$



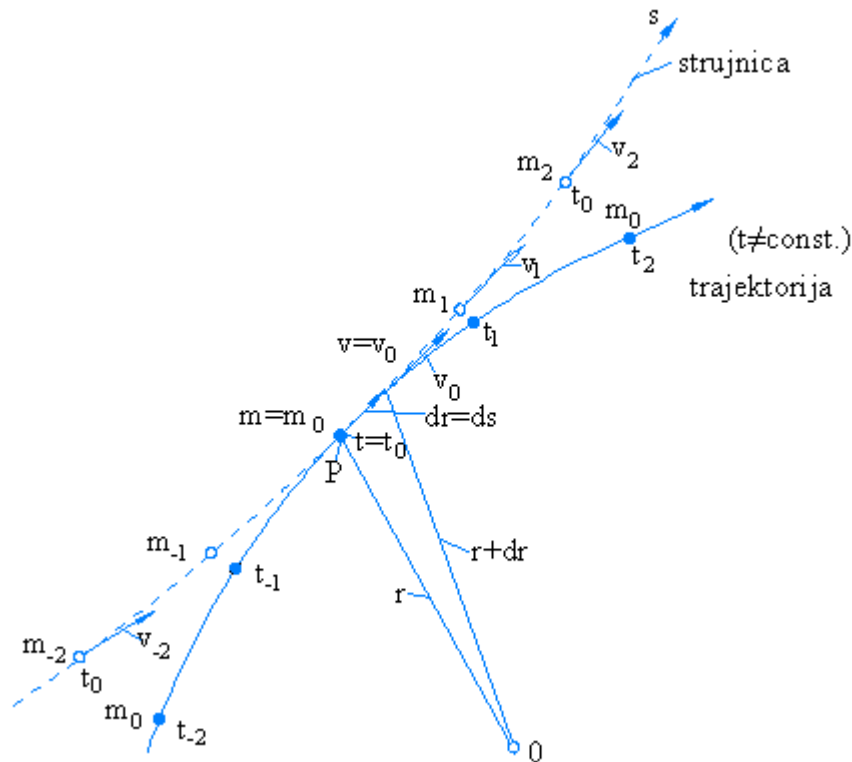
Slika 3.2 – definicijski prikaz vektora brzine $v(t, r)$

Integracijom po vremenu dobivaju se trajektorije. Njima se predstavljaju svi prostorni položaji kroz koje je isti djelić fluida m_0 prošao pri tečenju. Trajektorija je zbog toga pojmovno vezana uz Lagrange-ov pristup analizi tečenja.

Ukoliko se u nekom određenom trenutku t definiraju vektori brzina v za sve točke r promatranog strujnog polja te se iscrtaju linije na koje su vektori brzina tangente u svakoj točki strujnog polja, dobivaju se strujnice.

Grafička interpretacija za razlikovanje strujnica i trajektorija dana je na slici 3.3. Trajektorija povezuje točke kroz koje prolazi materijalni djelić tekućine označen sa m_0 u trenucima t_{-2} , t_{-1} , t_0 , t_1 , i t_2 . Strujnica povezuje točke u kojima se nalaze različiti djelići tekućine označeni sa m_{-2} , m_{-1} , m_0 , m_1 , i m_2 u trenutku t_0 . Prikazan slučaj odnosi se na nestacionarno tečenje dok se u slučaju stacionarnog tečenja strujnice i trajektorije poklapaju. Postoje i neki slučajevi nestacionarnog tečenja u kojem se

strujnice i trajektorije poklapaju (pulzirajuće tečenje) budući da se vektori brzina imaju konstantan smjer i u vremenu promjenljive vrijednosti. Važno je i napomenuti da se strujnice ne mogu sjeći budući da se proizvoljno odabrani djelić tekućine ne može gibati u različitim smjerovima u isto vrijeme.



Slika 3.3 – prikaz strujnice i trajektorije

Činjenica da su vektori brzina tangente na strujnicu odnosno da su u samoj točki tangiranja paralelni sa strujnicom može se matematički opisati vektorskim produktom $\mathbf{v} \times \mathbf{s} = 0$ pa se za fiksirano vrijeme t mogu dobiti i jednadžbe strujnica za trodimenzionalno i dvodimenzionalno tečenje.

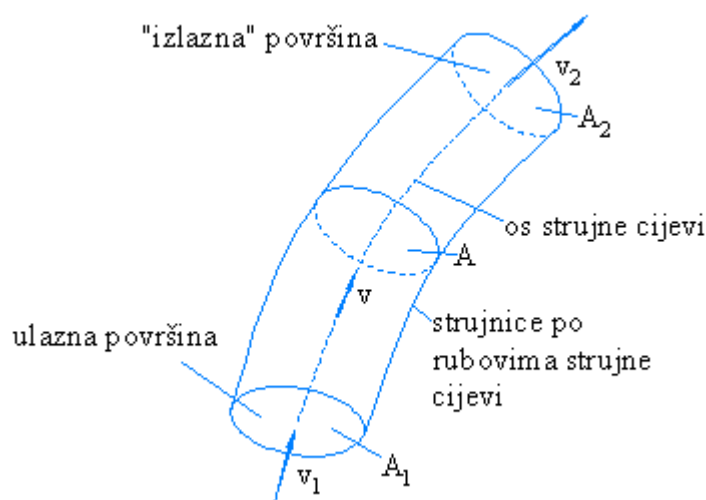
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad (3.3a,b)$$

U dvodimenzionalnom tečenju mogu se slike strunica jednostavno prikazati uz uvođenje strujne funkcije ψ . U nastavku ovog izvoda govoriti će se samo o nestišljivim tekućinama. Kod ravninskog strujanja prema Lagrange-u između strujnih funkcija i komponenti brzina vrijede slijedeće relacije:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.4a)$$

Strujno polje moguće je opisati sa samo jednom funkcijom $\psi(x, y)$. Uvrste li se komponente brzina prema 3.4a u jednadžbu 3.3b odnosno $v_y dx - v_x dy = 0$ dobiva se $(\partial\psi/\partial x)dx + (\partial\psi/\partial y)dy = d\psi = 0$ a što znači da uzduž jedne strujnice u $x - y$ ravnini $\psi = \text{konst.}$ Dakle svakoj strujnici može se dati jedna potpuno određena vrijednost.

Skup bliskih strujnica koji zajednički presijecaju površinu A zove se strujno vlakno (vidi sliku 3.4). Strujno vlakno sadrži i «ulaznu» i «izlaznu» površinu A_1 i A_2 kao i strujnu cijev (oplošnu površinu) $A_{1 \rightarrow 2}$ koja je opet sačinjena od rubnih strujnica. U općem slučaju se vrijednosti različitih fizikalnih veličina poput tlaka, gustoće, i brzine, usvajaju sa jednolikom raspodjelom po presjeku strujnog vlakna a što predstavlja jednodimenzionalni problem. Budući da su brzine po definiciji tangencijalne na strujnice ne može doći do «ulaska» i «izlaska» mase tekućine kroz strujnu cijev. Ta konstatacija poslužiti će kao osnova za jednadžbu kontinuiteta komentiranu u kasnijim poglavljima.



Slika 3.4 – prikaz strujne cijevi i strujnih vlakana

3.3.3 Polje ubrzanja

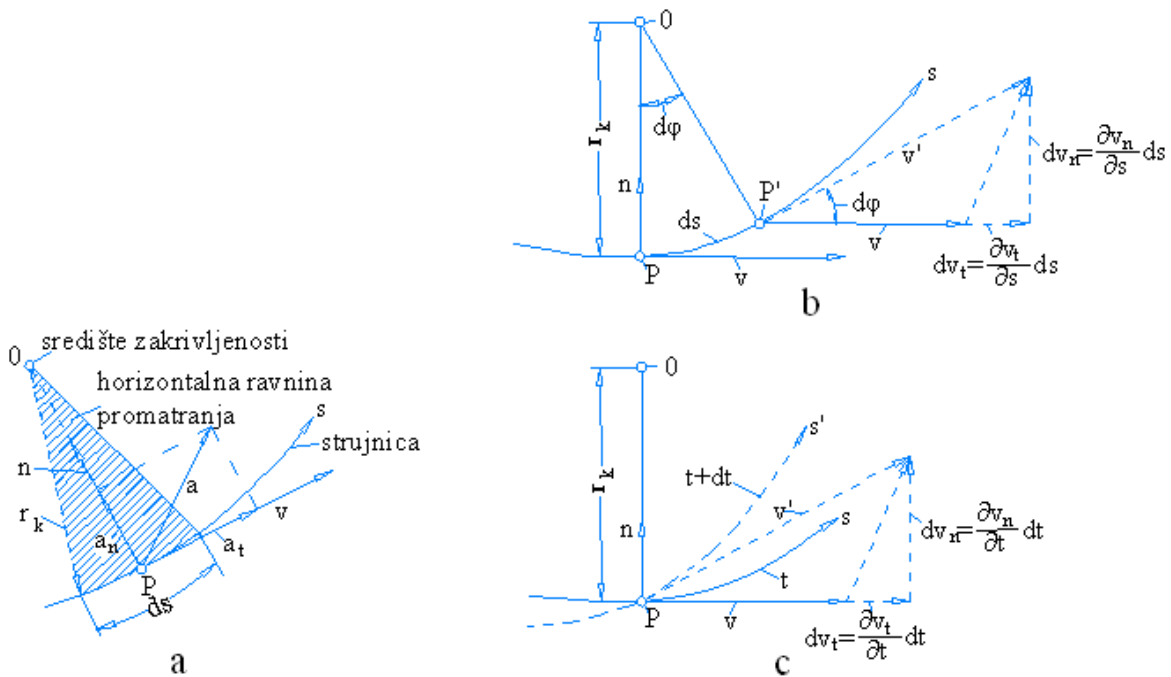
Od posebnog značaja, za kasnije izvode temeljnih jednadžbi hidrodinamike, je ubrzanje \mathbf{a} kao još jedna kinematska fizikalna veličina. Ubrzanje je definirano kao promjena brzine \mathbf{v} u vremenu t . I ima jedinicu m/s^2 . Polje ubrzanja opisano je sa $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r})$ a definicijska jednadžba glasi:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad a_i = \frac{dv_i}{dt} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.5a, b)$$

Ovo totalno-supstancijalno ili materijalno ubrzanje odnosi se na jedan određeni djelić tekućine koji se nalazi na položaju definiranim sa položajnim vektorom \mathbf{r} u trenutku t i ubrzava/usporeva uzduž

infinitesimalnog dijela strujnice/trajektorije ds . Ubrzanje je vektor kao i brzina. Ubrzanje ima smjer kao i promjena brzina dv i ne mora se poklapati sa smjerom vektora brzina v . Na slici 3.5 prikazano je gibanje po kružnici sa radijusom zakrivljenosti r_k . U nekom trenutku t djelić tekućine u kretanju nalazi se u točki P . Vektor ubrzanja a ima dvije komponente, jednu koja je tangencijalna na strujnicu a_t (tangencijalno ubrzanje) i jedna koja je normala na strujnicu a_n (centripetalno ubrzanje). Pri nestacionarnom tečenju sa brzinom $v(t,s)$ određivanje komponenti $a_t(t,s)$ i $a_n(t,s)$ provodi se u dva dijela. Promatra li se parcijalna promjena pri fiksiranom vremenu (slika 3.5b), točke P i P' sa segmenta strujnice imaju međusobnu udaljenost ds . Budući da pripadne brzine v i v' uvijek imaju orijentaciju u smjeru pružanja strujnice, pri promjeni položaja (konvektivna komponenta) od točke P nastupa promjena brzina u tangencijalnom i normalnom (radijalnom) smjeru element sa $dv_t = (\partial v_t / \partial s) ds$ i $dv_n = (\partial v_n / \partial s) ds$. Za segment strujnice $ds = r_k d\varphi$ također se može pisati i $ds = v dt$ te dobiti i izraz $d\varphi / dt = v / r_k$. Sa slike 3.5b također je razvidno da vrijedi $dv_n = (v + dv) / d\varphi = v d\varphi$.

Primjenom dobivenih odnosa doprinos konvektivnog ubrzanja u tangencijalnoj komponenti ubrzanja je $a_t = dv_t / dt = v(\partial v / \partial s)$ i u normalnoj (radijalnoj) komponenti ubrzanja $a_n = dv_n / dt = v(\partial \varphi / \partial t) = v^2 / r_k$. Promatra li se sada parcijalna promjena u fiksnoj točki prostora (slika 3.5c) i u slučaju nestacionarnog tečenja, strujnice se u vremenima t i $t + dt$ razlikuju. Nasuprotno strujnici u trenutku t , u toku vremenskog intervala dt nastupaju promjene brzina u tangencijalnom i normalnom smjeru pa se piše $dv_t = (\partial v_t / \partial t) dt = (\partial v / \partial t) dt$ odnosno $dv_n = (\partial v_n / \partial t) dt$. Za lokalnu komponentu ubrzanja time su dobivene jednakosti: $a_t = dv_t / dt = \partial v / \partial t$ i $a_n = \partial v_n / \partial t$.



Slika 3.5 - tečenje po kružnici (a-položaj vektora ubrzanja ; b – konvektivna komponenta ubrzanja ; c – lokalna komponenta ubrzanja)

Provedenom analizom dobivene su komponente ubrzanja pri gibanju djelića tekućine uzduž jedne zakrivljene strujnice:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s}, \quad a_n = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r_k} \quad (3.6a,b)$$

dv/dt – ukupno ili supstancijalno (materijalna) ubrzanje

$\partial v/\partial t$ – lokalna komponenta ubrzanja ($\partial v/\partial t = 0 \rightarrow$ stacionarno)

$v(\partial v/\partial s)$; v^2/r_k – konvektivna ili prijenosna komponenta ($\partial v/\partial s = 0 \rightarrow$ jednoliko ali ne mora biti i stacionarno)

Za slučaj trodimenzionalnog tečenja, koje se prati kroz kartezijev koordinatni sustav sa osima x , y , z , brzina i ubrzanje mogu se izraziti sa tri komponente v_x , v_y , v_z i a_x , a_y , a_z te vrijede slijedeće jednakosti:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{dv_x}{dx_x} + v_y \frac{dv_x}{dx_y} + v_z \frac{dv_x}{dx_z}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{dv_y}{dx_x} + v_y \frac{dv_y}{dx_y} + v_z \frac{dv_y}{dx_z}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{dv_z}{dx_x} + v_y \frac{dv_z}{dx_y} + v_z \frac{dv_z}{dx_z}$$

$$a_i = \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{dv_i}{dx_j}, \quad (i=1,2,3) \quad (3.7a)$$

Poopćenjem jednadžbi 3.7a dobiva se i jednadžba polja ubrzanja 3.7b,c koja je neovisna o izboru koordinatnog sustava:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) \quad (3.7b,c)$$

gdje je:

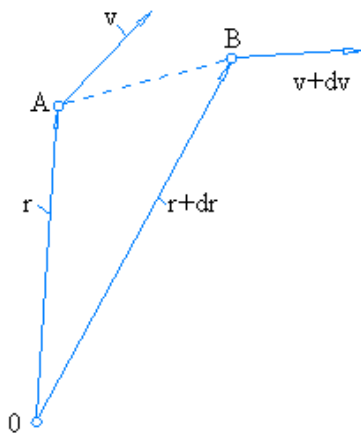
$\text{grad } \mathbf{v}$ – gradijentni tenzor polja brzina (tenzorski prikaz $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v}$ prema pravilima tenzorske analize može se prevesti u oblik $\text{grad} (\mathbf{v}^2/2) - (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v})$)

3.4 Kinematika djelića tekućine

3.4.1 Gradijentni tenzor polja brzina

Djelić tekućine koji se giba u strujnom polju osim prostorne promjene položaja ostvaruje odnosno trpi i deformaciju. Prostorni položaj ili njegova promjena opisane su sa položajnim vektorom \mathbf{r} i sa kutnom brzinom $\boldsymbol{\omega}$ dok je promjena oblika opisana sa promjenama u početnim duljinama stranica i početnim kutovima između stranica promatranog djelića.

Ukoliko se želi odrediti promjena oblika djelića tekućine potrebno je tretirati relativno gibanje koje se u nekom trenutku t promatra između dvije točke tekućine A i B koje se nalaze na djeliću tekućine. Položaj promatranih točaka definiran je sa položajnim vektorima \mathbf{r} i $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ i vektorima brzina \mathbf{v} i $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ pri čemu je $d\mathbf{v}$ tražena promjena brzina (vidi sliku 3.6).



Slika 3.6 – relativno gibanje između dvije točke A i B u vremenskom trenutku t

U kartezijevom koordinatnom sustavu s indeksno notiranim osima x_i ($i = 1,2,3$) prostorna promjena brzine (tenzor promjene oblika) definirana je izrazom:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = (D_{ij} + R_{ij}) dx_j \quad (i = 1,2,3) \quad (3.8a)$$

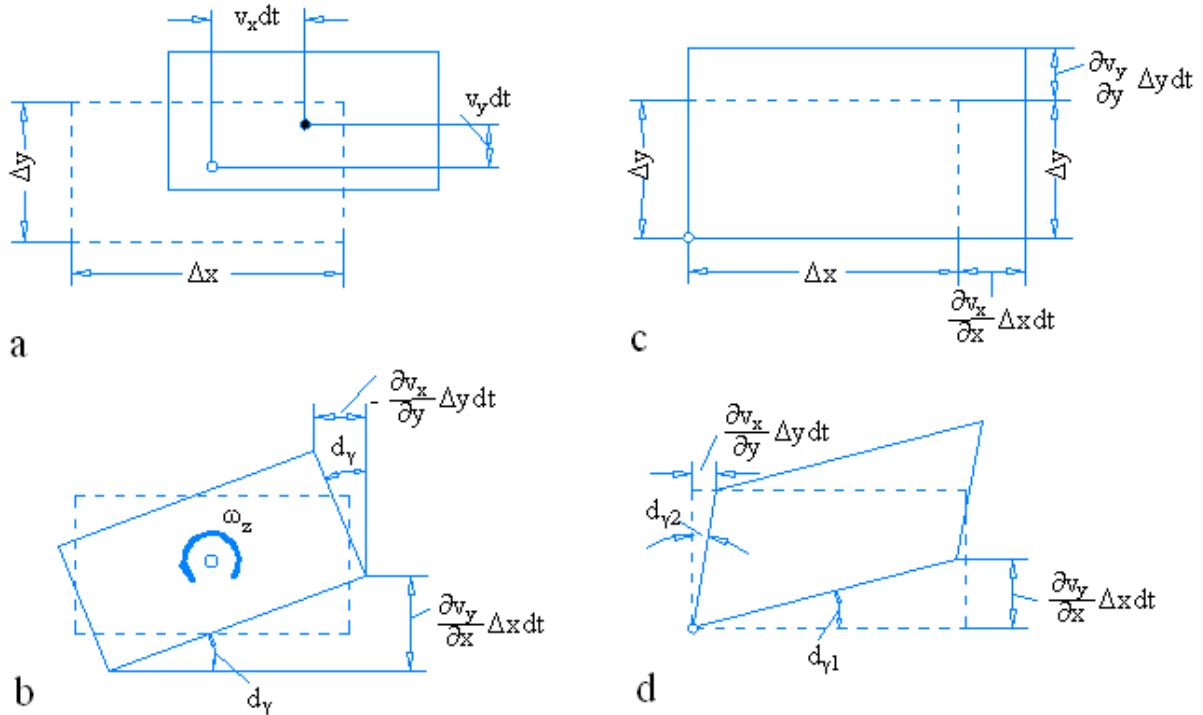
u kojem skraćeniice imaju slijedeću matematičku formulaciju:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = D_{ji}, \quad D_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (i = 1,2,3) \quad (3.8b)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -R_{ji} \quad R_{ii} = 0 \quad (i = 1,2,3) \quad (3.8c)$$

3.4.2 Translacija i rotacija djelića tekućine

U kinematici djelića tekućine analiziraju se translacija (slika 3.7a), rotacija (slika 3.7b), dilatacija (slika 3.7c), i kutna deformacije (slika 3.7d). Obzirom na njihovu linearnost moguće ih je tretirati zasebno. Kinematika krutog tijela analizira samo translaciju i rotaciju.



Slika 3.7 – Gibanje i deformacija djelića tekućine u ravninskom tečenju (a – translacija ; b – rotacija ; c - dilatacija ; d - kutna deformacija)

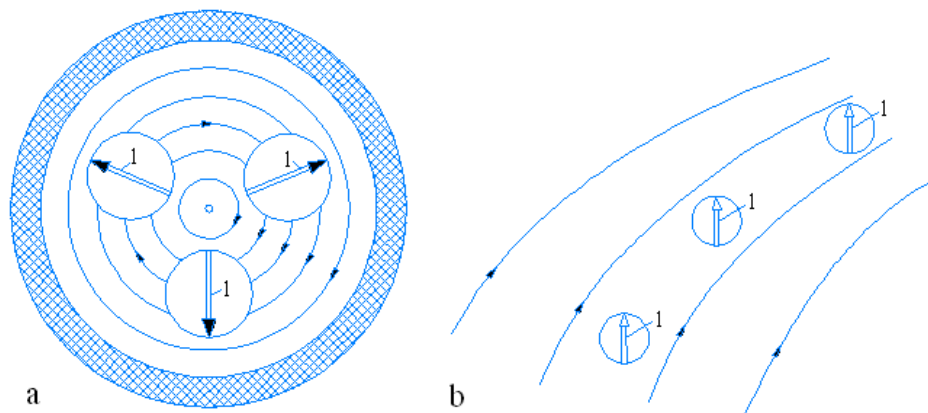
Translacija djelića tekućine koja se nalazi u nekom položaju strujnog polja definiranog sa \mathbf{r} određena je sa promjenom položaja težišta djelića tekućine koje se giba brzinom \mathbf{v} . Komponente translacije u ravni $x - y$ su $v_x dt$ i $v_y dt$. Rotacija djelića tekućine određuje se sa definiranjem kutne brzine $\boldsymbol{\omega}$ oko njegovog težišta. Pri rotaciji dolazi do promjene položaja rubnih točaka $-(\partial v_x / \partial y) \Delta y dt$ i $(\partial v_y / \partial x) \Delta x dt$ u x i y smjeru. Dakle, kao i kod krutog tijela, djelić tekućine zarotira se za kut $d\gamma = (\partial v_y / \partial x) dt = (\partial v_x / \partial y) dt$. Promjene kuta u vremenu $d\gamma / dt$ jednaka je kutnoj brzini oko z -osi (okomita na prikazanu ravninu) koja se može prikazati i kao aritmetička sredina od $\partial v_y / \partial x$ i $\partial v_x / \partial y$ te se dobiva jednakost $2\omega_z = \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$. U prostornom (3D) slučaju pojavljuju se kutne brzine oko sve tri osi a rotacija se opisuje vektorom vrtložnosti $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_x \omega_x + \mathbf{e}_y \omega_y + \mathbf{e}_z \omega_z$ ili kao tenzor vrtložnosti $\omega_{i,j}$ koji su neovisni o izboru koordinatnog sustava:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.9a,b)$$

odnosno u prikazu po komponentama:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad ; \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad ; \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Pojam vrtložnosti može se pojasniti sa rezultatima provedbe jednostavnog pokusa. Ukoliko se na površinu plutanog čepa markira strelica (vidi sliku 3.8) koja u sukcesivnim vremenima t_1, t_2, t_3 markerska strelica stalno zadržava svoju početnu orijentaciju, radi se o bezvrtložnom gibanju i obratno. Tipičan primjer vrtložnog strujanja u kojem bi markerska strelica na čepu stalno mijenjala svoj smjer je kružno tečenje u cilindričnoj posudi (slika 3.8a).



Slika 3.8 – primjeri vrtložnog (a) i bezvrtložnog (b) tečenja

3.4.3 Promjena oblika djelića tekućine

Svako tijelo pri djelovanju vanjskih sila ili utjecaja topline može mijenjati svoju formu. Osnovne veličine kojima se opisuje promjene u formi tijela odnosno njegove deformacije su duljine i kutovi. Uobičajena je podjela deformacije na dilataciju i kutnu deformaciju. Obzirom na linearnost tih deformacija moguće ih je tretirati svaku za sebe.

Jedan inicijalne nedeformirani djelić tekućine u formi kvadra sa duljinama bridova $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ostvaruje pri gibanju dilataciju definiranu sa promjenom duljina bridova $d(\Delta x) = (\partial v_x / \partial x) \Delta x dt$, $d(\Delta y) = (\partial v_y / \partial y) \Delta y dt$ i $d(\Delta z) = (\partial v_z / \partial z) \Delta z dt$. U vremenu dt ostvariti će se komponente dilatacijske brzine:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.10a, b)$$

Usporedbom sa 3.8b može se uočiti da članovi ε_{ii} odgovaraju članovima glavne dijagonale tenzora promjene brzine D_{ii} .

Dilatacija uzrokuje promjenu volumena koja iznosi $d(\Delta V) = [\Delta x + d(\Delta x)] [\Delta y + d(\Delta y)] [\Delta z + d(\Delta z)] - \Delta x \Delta y \Delta z$. Odjeljenje sa inicijalnim volumenom $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ dobiva se bezdimenzionalna jednadžba a ukoliko se uvrste i gore navedene jednakosti za $d(\Delta x)$, $d(\Delta y)$ i $d(\Delta z)$ dobiva se relativna promjena volumena u vremenu koja se naziva i brzina dilatacije (uz zanemarenje članova višeg reda):

$$\psi = \frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \quad \psi = \text{div } \mathbf{v} \quad (3.11a,b)$$

Jednadžba 3.11 važeća je za bilo koju formu djelića tekućine i neovisna je o izboru koordinatnog sustava. U teoriji elastičnosti član $d(\Delta V)/\Delta V$ naziva se volumna ili kubna dilatacija. Ukoliko se radi o nestišljivoj tekućini vrijedi $\psi = 0$, odnosno djelić tekućine ne može imati promjene volumena.

Na slici 3.7 prikazana je kutna deformacija koja djelić tekućine u inicijalnoj formi pravokutnika prevodi u paralepipeda. Gornja i donja površina (dužina u ravninskom problemu) zarotirale su se za kut $d\gamma_1$ a lijeva i desna površina za kut $d\gamma_2$. Time se inicijalni pravi kut promijenio za $d\gamma = d\gamma_1 + d\gamma_2$. Uz pomoć izraza $(\partial v_y/\partial x)\Delta x dt$ i $(\partial v_x/\partial y)\Delta y dt$ dobiva se i ukupna promjena kuta $d\gamma$ u vremenu dt . Slično kao i kod kutne brzine u rotaciji može se definirati i kutna brzina u deformaciji ili skraćeno brzina kutne deformacije sa izrazom $2\vartheta_z = \partial v_y/\partial x + \partial v_x/\partial y$. U prostornom (3D) slučaju dobiva se

$$\vartheta_{ij} = \vartheta_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (i \neq j) \quad (3.12)$$

te vrijedi $\vartheta_{23} = \vartheta_x$; $\vartheta_{31} = \vartheta_y$ i $\vartheta_{12} = \vartheta_z$. Usporedbom 3.12 sa 3.8b može se uočiti da članovi ϑ_{ij} odgovaraju članovima simetričnog dijela tenzora promjene brzine D_{ij} (tenzor promjene oblika) te da brzina dilatacije proračunata prema jednadžbi 3.11 nije pod utjecajem kutne deformacije.

Zajedničko djelovanje dilatacije i kutne deformacije opisuje se kroz članove simetričnog dijela tenzora promjene brzine (tenzor promjene oblika) pri čemu članovi glavne dijagonale $i = j$ predstavljaju dilataciju a ostali članovi $i \neq j$ kutnu deformaciju. Matrica dobivena na način da za njene članove vrijedi odnos $D_{ij} = D_{ji}$ naziva se tenzor deformacija.

Napominje se da je analiza provedena pod pretpostavkom infinitezimalne promjene oblika u kojoj se uzima u obzir samo učešće linearnih članova a kvadratni članovi se zanemaruju. Svako stanje deformacija je povezano i sa odgovarajućim stanjem naprezanja. Dilatacijska deformacija uzrokuje normalna naprezanja a kutna deformacija uzrokuje tangencijalna naprezanja.

3.5 Zakon očuvanja količine polja

3.5.1 Fizikalne veličine i njihove karakteristike

Vodeću ulogu pri opisivanju tečenja imaju vremenske i prostorne promjene određenih karakteristika tekućina i transportnih veličina koje mogu imati skalarni ili vektorski karakter. Transportne veličine su u stvari one fizikalne veličine koje se nalaze u pronosu (transportu) kroz strujno polje i za koje se provodi analiza pronosa odnosno transporta.

Promjene u poljima fizikalnih veličina poput polja brzina ili temperatura odvijaju se kroz mehanizam pronosa transportnih veličina. Matematička interpretacija mehanizma pronosa transportnih veličina dana je sa jednadžbama pronosa transportnih veličina ili skraćeno transportnim jednadžbama. U osnovi, radi se o jednadžbama koje predstavljaju zakon o očuvanju količine polja.

Ukoliko neka fizikalna veličina ne ovisi o masi promatrane tekućine naziva se maseno neovisna ili *intenzivna* veličina. Kao polje može biti funkcija vremena t i prostornog položaja definiranog vektorom \mathbf{r} te se može označiti sa $E = E(t, \mathbf{r})$. Tipični predstavnici skalarnih polja u analizi ponašanja tekućina su tlak (p) i temperatura (T) a vektorskih brzina (\mathbf{v}) i ubrzanje (\mathbf{a}).

Ukoliko je neka fizikalna veličina proporcionalna masi nekog prostorno ograničenog sustava tekućine govori se o maseno ovisnoj ili *ekstenzivnoj* veličini. Kako se radi o promatranju prostorno ograničenog sustava tekućine, transportne veličine su ovisne samo o vremenu i označuju se sa $J = J(t)$. Tipični predstavnici su masa, količina gibanja, energija i entropija. Ukoliko se umjesto na karakteristiku mase analiza orijentira na karakteristiku volumena dobivaju se karakteristične gustoće transportne veličine (transportna veličina / volumen). Primjerice transportna veličina je masa suspendiranih čestica ugljičnog dioksida (m_{CO_2}) u nekom volumenu atmosfere (V) a pripadna karakteristična gustoća (m_{CO_2}/V) je koncentracija sa jedinicom kg/m^3 . Ukoliko je za transportnu veličinu odabrana količina gibanja (mv) u nekom volumenu strujnog polja (V) onda je pripadna karakteristična gustoća ($mv/V = \rho v$) izražena sa jedinicom $\text{kg/m}^2\text{s}$.

Ukoliko se volumen sažima u infinitezimalni volumen dobiva se $\varepsilon = dJ/dV$. Integracijom po zatvorenom ($m = \text{konst.}$) i u vremenu promjenljivom volumenu ($V(t)$), tzv. materijalnom volumenu dobiva se:

$$J(t) = \int_{V(t)} \varepsilon dV \quad (3.13)$$

Prema tome, osnovna zadaće je sadržana u određivanju prostorne i vremenske promjene polja $E(t, \mathbf{r})$ i transportnih veličina $J(t)$ u strujnom polju.

Za primjer osnovne zadaće odabrane su toplina (transportna veličina) i temperatura (skalarno polje). Analiza se provodi u smislu određivanja utjecaja transporta (pronosa) topline kroz strujno polje na prostorne i vremenske promjene u polju temperature. Važno je i primijetiti da se temperatura ne može «pronositi», već se uslijed pronosa topline mijenja i temperatura.

3.5.2 Jednadžbe pronosa za polja

Određivanje vremenskog i prostornog rasporeda količine pojedinog polja od interesa (koncentracije, temperature, tlaka, brzine ...) provodi se na temelju zakona o očuvanju količine odgovarajućeg polja (mase otopljene ili suspendirane tvari, unutrašnje energije, količine gibanja) izraženih u obliku totalnih vremenskih promjena dE/dt i dJ/dt .

U stalno promjenljivom strujanju u nekom vremenu t jednom djeliću tekućine na jednom prostornom položaju \mathbf{r} pridruženo je polje $E(t, \mathbf{r})$. Za funkciju polja je pretpostavljeno da su diferencijalni kvocijenti u diferencijalnim jednadžbama stalna neprekinuta funkcija njezinih argumenata.

Element tekućine pri tečenju mijenja vrijednost vremenske i prostorne koordinate sa brzinom \mathbf{v} te u vremenu dt pređe put $d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$. Vremenska i prostorna promjena polja je prema tome $dE = E(t+dt, \mathbf{r}+d\mathbf{r}) - E(t, \mathbf{r})$ a totalna ili supstancijalna derivacija polja dE/dt dobiva se upotrebom transportnih jednadžbi (jednadžba pronosa). Ukoliko je $dE/dt = 0$ onda promatrani djelić tekućine zadržava svoju karakteristiku tijekom gibanja u strujnom polju s time da ona može biti različita od jednog do drugog djelića tekućine. Kod jednodimenzionalnog strujanja, sa prostornom koordinatom

strujnice s , ukupna promjena polja $E(t,s)$ je $dE = \frac{\partial E}{\partial t} dt + \frac{\partial E}{\partial s} ds$ sa $ds = v dt$, dok pri trodimenzionalnom strujanju, uz oznaku x_j za komponentu strujnice, ukupna promjena polja $E(t,x_j)$ je $dE = \frac{\partial E}{\partial t} dt + \frac{\partial E}{\partial x_j} dx_j$ sa $dx_j = v_j dt$. Iz navedenog slijedi da je u vremenu dt ukupna promjena iznosi za jednodimenzionalno i trodimenzionalno tečenje:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + v \frac{\partial E}{\partial s}, \quad \frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + v_j \frac{\partial E}{\partial x_j} \quad (3.14a,b)$$

Članovi na desnoj strani jednadžbi predstavljaju vremensku (lokalnu) i prostornu (prijenosnu) promjenu. Za slučaj trodimenzionalnog strujanja i proizvoljno odabranog skalarnog polja dobiva se neovisno o izboru koordinatnog sustava

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } E = \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(E\mathbf{v}) - E \text{div } \mathbf{v} \quad (3.14c)$$

gdje $\text{grad } E$ predstavlja gradijentni vektor funkcije skalarnog polja E . Nadalje, $\text{div}(E\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad } E + E \text{div } \mathbf{v}$ gdje za slučaj nestlačive tekućine zadnji član poprima vrijednost $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

Izvod totalne promjene nekog vektorskog polja $\mathbf{E}(t,\mathbf{r})$ formalno se može preuzeti iz provedenog izvoda za skalarno polje u kartezijevom koordinatnom sustavu. Tako se u jednadžbu 2.41b umjesto E trebaju uvrštavati komponente $E_i(t,x_j)$. Preuzimanjem jednadžbe 3.14c i upotrebom vektorskog polja dobiva se:

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{E} \quad (3.14d)$$

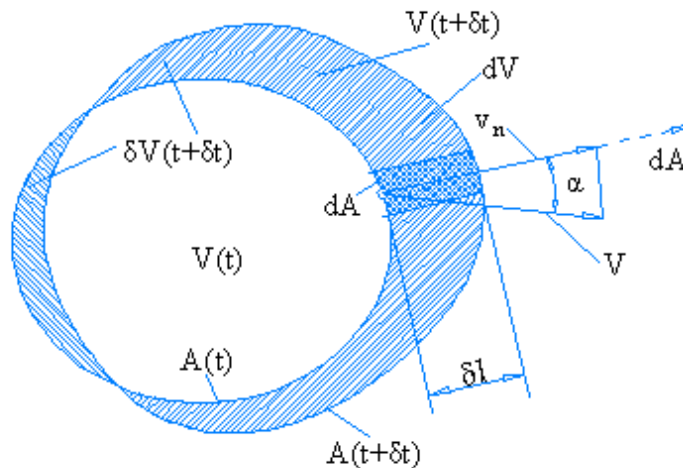
gdje $\text{grad } \mathbf{E}$ predstavlja gradijentni tenzor funkcije vektorskog polja \mathbf{E} .

3.5.2 Jednadžbe pronosa karakterističnih gustoća

U prijašnjem poglavlju provedena je analiza pronosa vektorskog \mathbf{E} i skalarnog polja E . Zaključno dobivene su i jednadžbe pronosa (transportne jednadžbe). U ovom poglavlju provodi se analiza

ponosa karakteristika volumena J i J dobivenih sa jednadžbom 3.13 odnosno integracijom karakteristične gustoće transportne veličine $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ (transportna veličina / volumen).

Prednost ovakvog promatranja sadržana je u tome što se ne mora uvoditi pretpostavka o prostornoj neprekinutoj derivabilnosti $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r})$ i $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r})$. U promatranom volumenu $V(t)$ koji u vremenu obuhvaća istu masu tekućine m (tzv. materijalni volumen) dozvoljena je pojava prostornih nejednolikosti poput zbijanja tekućine (nehomogeno polje gustoća). Za provedbu analize pronosa materijalni volumen $V(t)$ može se promatrati kao izdvojenu cjelinu. Slično kao i u analizi pronosa polja sada se promatra totalna-supstancijalna promjena dJ/dt . U integralu $J(t)$ pojavljuje se funkcijska ovisnost o vremenu ne samo u članu $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{r})$ veći i u području integracije $V(t)$ što bitno otežava diferencijaciju po vremenu t . Ipak postoji mogućnost preformuliranja konvektivne komponente kako bi se jednostavnije riješio taj problem.



Slika 3.9 – prikaz materijalnog volumena sa pripadnim volumenom $V(t)$ u trenutku t i $V(t+\delta)$ u trenutku $t+\delta$

U trenutku t materijalni volumen definiran je sa $V(t)$ dok je u trenutku $t+\delta t$ volumen prešao u $V(t+\delta) = V(t) + \delta V(t+\delta) = V + \delta V$ (vidi sliku 3.9). Analogno se definiraju i promjene karakteristične gustoće $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ u $\boldsymbol{\varepsilon}(t+\delta t)$. Prelaskom u granične vrijednosti $\delta t \rightarrow 0$ iščezava i volumna promjena $\delta V \rightarrow 0$. Upotrebom definicije za diferencijalne kvocijente kroz granične vrijednosti dobiva se:

$$\frac{dJ}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{J(t+\delta t) - J(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left[\int [\boldsymbol{\varepsilon}(t+\delta t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)] dV + \int_{\delta V} \boldsymbol{\varepsilon}(t+\delta t) dV \right]$$

Prema slici 3.9 površina oplošja materijalnog volumena $A(t)$ također je u vremenu prešla u $A(t+\delta t)$. Pri tome je element površine dA pomaknut sa brzinom v_n koja je jednaka projekciji

vektora brzine \mathbf{v} na vanjsku normalu \mathbf{n} te površine a pomak iznosi $\delta l = v_n \delta t$. Pripadni volumen $dV = dA \delta l = (v_n dA) \delta t = (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \delta t$ prikazan je na slici 3.9 sa dvostrukom šrafurom. Sada se može definirati i promjena volumena prikazanog sa jednostrukom šrafurom koja iznosi $\delta V = \int dV$. Za vrijeme vremenskog intervala δt karakteristične gustoće $\varepsilon(t)$ promijenila se u $\varepsilon(t + \delta t) = \varepsilon(t) + (\partial \varepsilon / \partial t) \delta t + \dots$. Nakon izvoda granične vrijednosti $\lim_{\delta t \rightarrow 0}$ totalna ili supstancijalna promjena karakteristike volumena $J(t)$ jednaka je:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varepsilon dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \oint_{A(t)} \varepsilon (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (3.15a,b)$$

Pri integraciji po materijalnom volumenu $V(t)$ za $\partial \varepsilon / \partial t$ pretpostavlja se da je neprekidna funkcija od \mathbf{r} , dok se pri integraciji po zatvorenoj površini (oplošju) $A(t)$ materijalnog volumena zahtjeva da je ε jedna ograničena funkcija.

Budući da su $V(t)$ i $A(t)$ u izrazu 3.15 ovisni još samo od vremena t a ne i od vremena $t + \delta t$ u provedbi analize pronosa (transporta) moguć je i prijelaz na prostorno fiksiran volumen $V(t) = V = \text{konst.}$ sa prostorno fiksiranom zatvorenom površinom (oplošjem) $A(t) = A = \text{konst.}$ Pri tome se pojam materijalnog volumena $V(t)$ zamjenjuje sa kontrolnim volumenom (V) a površina materijalnog volumena $A(t)$ sa kontrolnom površinom (A). Prema tome jednadžbe pronosa (transportne jednadžbe) mogu se pisati i na slijedeći način:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{(V)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \oint_{(A)} \varepsilon (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (3.16a)$$

Ukoliko je vektor brzina \mathbf{v} usmjeren kao i vanjska normala \mathbf{n} na kontrolnu površinu (A) njihov umnožak $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA$ je pozitivna vrijednost i obratno.

Poveznica između jednadžbi pronosa za materijalni i kontrolni volumen dakle glasi (Reynolds-ov transportni teorem):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \varepsilon dV = \int_{(V)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \oint_{(A)} \varepsilon (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (3.17)$$

odnosno

$$\int_{(V)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \oint_{(A)} \varepsilon (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) = \int_{V(t)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV + \oint_{A(t)} \varepsilon (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) \quad (3.18)$$

Važno je uočiti da je na lijevoj strani jednadžbe 3.18 područje integracije materijalni volumen $V(t)$ a na desnoj strani jednadžbe područje integracije su kontrolni volumen (V) i kontrolna površina (A) .

Ukoliko je opažatelj na nekom fiksiranom položaju u prostoru, primjerice u točki kontrolnog volumena onda će ukupna promjena u vremenu $d\varepsilon/dt$ koju on registrira biti jednaka parcijalnoj promjeni u vremenu $\partial\varepsilon/\partial t$ pa u slučaju analize sa kontrolnim volumenom vrijedi:

$$\frac{d}{dt} \int_{(V)} \varepsilon dV = \int_{(V)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV \rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

Analiza provedena sa kontrolnim volumenom odgovara Euler-ovom načinu promatranja tekućina u gibanju u kojoj je ukupna promjena u vremenu dJ/dt podijeljena na u lokalnu komponentu

$$\int_{(V)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dV \text{ (parcijalna promjena u vremenu) i prostornu ili prijenosnu komponentu } \oint_{(A)} \varepsilon \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

(parcijalna promjena po prostoru). Ukoliko je lokalna komponenta (parcijalna derivacija po vremenu) jednaka nuli tečenje je stacionarno. Ukoliko je konvektivna komponenta (promjena po prostoru) jednaka nuli tečenje je jednoliko. Prema tome moguće su četiri kombinacije: stacionarno i jednoliko, stacionarno i nejednoliko, nestacionarno i jednoliko te nestacionarno i nejednoliko tečenje.

Upotrebom Green-Gauss-Ostrogradski teorema:

$$\oint_A \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \text{div } \mathbf{a} dV$$

jednadžba 3.16 poprima oblik:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{(V)} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div}(\varepsilon \mathbf{v}) \right] dV \quad (3.19)$$

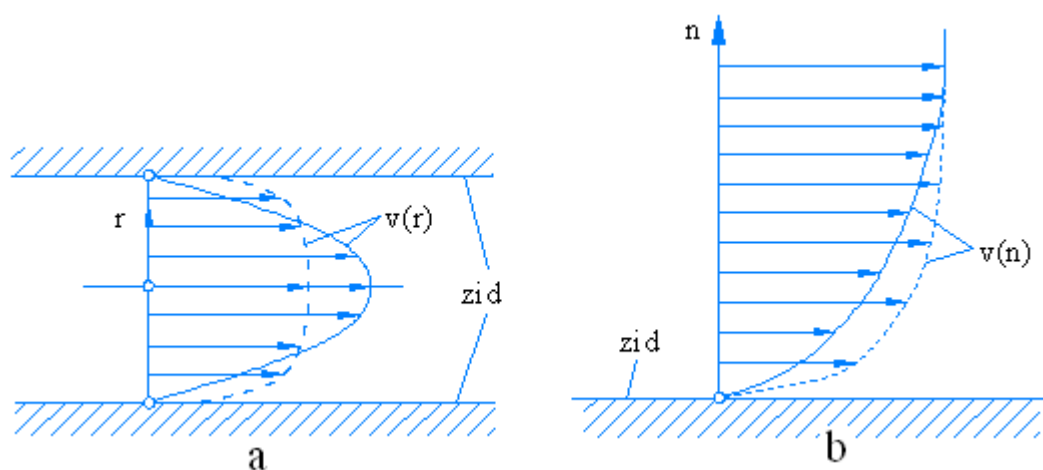
4 Vidovi tečenja tekućina

Osim kinematskih podjela na stacionarno/nstacionarni te jednosliko/nejednoliko tečenje od velike važnosti je «dinamička» klasifikacija tokova na laminarno i turbulentno te mirno i silovito tečenje.

4.1 Laminarno i turbulentno tečenje

Laminarno tečenje je ono u kojem nema međusobnog miješanja slojeva (lamina). Djelići tekućine gibaju se po međusobno odvojenim putanjama pri čemu su vektori brzina u svakoj točki tangencijalni na osnovni smjer tečenja. Pri takvom vidu tečenju, uslijed viskoznosti, tangencijalna naprezanja koja se pojavljuju između pojedinih slojeva definirana su sa jednadžbom 1.4. Pri tečenju realne tekućine u točki dodira sa krutom stjenkom brzine su nula. Profili brzina u cijevi kružnog poprečnog presjeka i pri opstrujavanju tijela (ravne ploče) dani su na slici 4.1 sa punom linijom. Profil brzina u presjeku kružne cijevi ima oblik rotacionog paraboloida a maksimalna brzina ostvaruje se u središtu presjeka sa brzinom dvostruko većom od srednje brzine u cijelom presjeku.

U turbulentnom tečenju dolazi do stalnog miješanja slojeva pa se shodno tome i djelići tekućine ne gibaju kontinuirano u istom sloju. Ukoliko se u točkama proticajne površine i u nekom periodu vremena kontinuirano mjere brzine te se odrede srednje vrijednosti za svaku pojedinu točku dobiva se profil osrednjenih brzina turbulentnog tečenja prikazan na slici 4.1 sa iscrtkanom linijom. Pri kontinuiranom mijenjanju položaja djelića tekućine dolazi i do izmjene više ili manje intenzivne mase, količine gibanja i energije prije svega u smjeru okomitom na smjer osnovnog tečenja. Proces miješanja uzrok je i pojavi jednolikijeg profila brzina u usporedbi sa laminarnim tečenjem (vidi sliku 4.1)



Slika 4.1 – Profili brzina u laminarnom i turbulentnom tečenju (a – tečenje kroz cijev kružnog poprečnog presjeka, b- opstrujavanje ravne ploče)

Turbulentno tečenje se rješava kroz stohastički ili fenomenološki pristup a rješenje u matematičkom i fizikalnom smislu nije još u potpunosti riješeno. U neposrednoj blizini čvrste granice fluktuacije brzina zamiru a utjecaj viskoznosti ima dominantnu ulogu. Taj tanki sloj naziva se viskozni podsloj a dio profila brzina u kojem se očituju promjene u vremenu osrednjenih brzina naziva se granični sloj. U pogledu tehničke primjene turbulentno značenje od veće je važnosti budući da se većina slučajeva tečenja u prirodi odvija u turbulentnom režimu.

Za definiranje prelaska iz laminarnog u turbulentni težim koristi se bezdimenzionalni parametar Reynolds-ov broj koji predstavlja omjer inercionih i viskoznih sila no može se shvatiti i kao broj koji kvantificira učestće viskoznih sila u inercionoj rezultanti. Reynolsov broj je bezdimenzionalan a definiran je sa:

$$Re = vL/\nu \quad (4.1)$$

gdje je:

v – brzina

L – karakteristična duljina

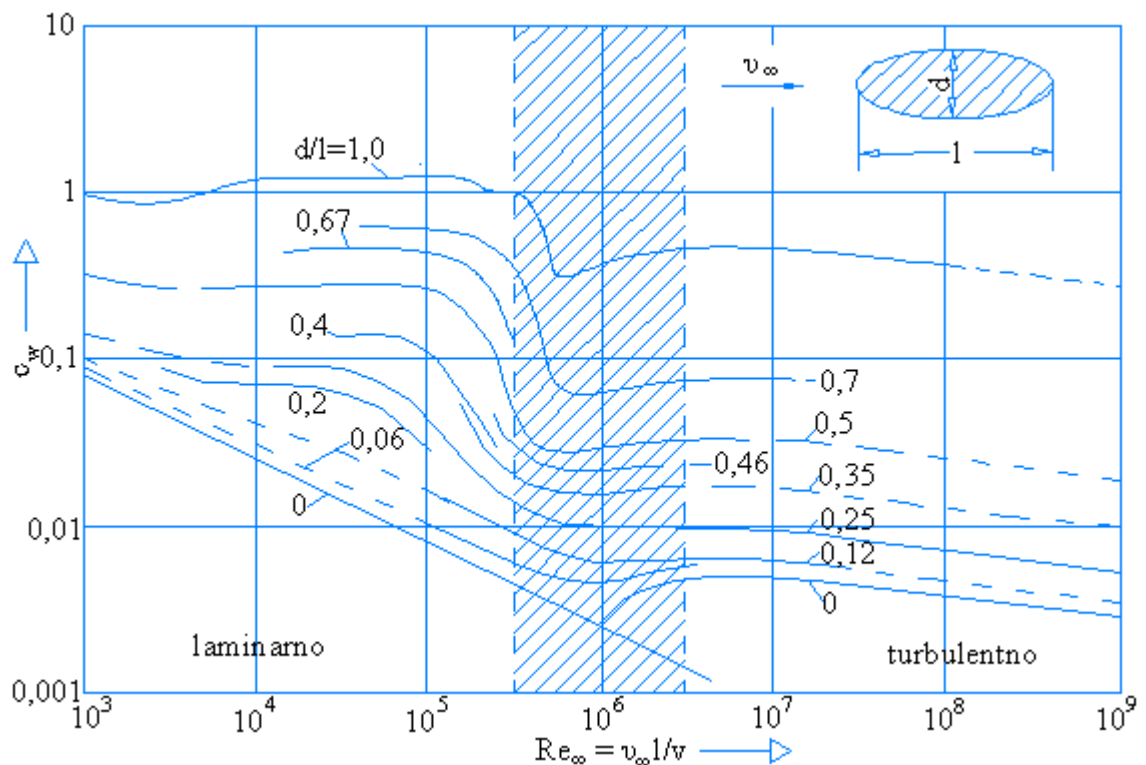
ν - kinematski koeficijent viskoznosti

Ovisno o problematici koja se analizira odabire se i karakteristična duljina L . Primjerice ukoliko se komentira tečenje u cijevima za karakterističnu duljinu odabire se promjer cijevi D .

Prelazak iz laminarnog u turbulentno tečenje nastupa ukoliko dolazi do prekoračenje kritičnog Reynolds-ovog broja koji je također ovisan o promatranom tečenju. Primjerice u cijevima $Re_{krit} = 2310$. Taj broj međutim nije apsolutna razdjelnica između laminarnog i turbulentnog tečenja. Čak i u primjeru tečenja kroz cijev moguće je postizanje $Re = 10000$ a da još uvijek ne dođe do prelaska u turbulentno tečenje ukoliko je cijev skoro apsolutno stabilizirana. Ukoliko se cijev izloži i najmanjem poremećaju poput blagog pomicanja cijevi tečenje će skoro trenutno preći u turbulentno.

U slučaju promatranja opstrujavanja ravne ploče karakteristična duljina L predstavlja horizontalnu udaljenost od početka ravne horizontalno položene ploče pa do točke promatranja x_L a pripadni $Re = v_\infty x_L/\nu$. Brzina v_∞ označava brzine u neporemećenom profilu prije nailaska na ravnu ploču. Kritični Reynolds-ov broj u ovom slučaju je $\approx 2 \times 10^6$. Na slici 4.2 dan je i prikaz ovisnosti koeficijenta otpora $C_W = 2W/\rho v_\infty^2 b l$ (b – širina profila, W – sila otpora tijela) za opstrujavani

eliptični profil o Reynolds-ovom broju $Re = v_\infty l / \nu$. Prelazak iz laminarnog u turbulentno tečenje predstavljen je šrafiranim područjem $Re_{krit} \approx 10^6$. Ukoliko je $d/l = 0$ očigledno je da se radi o ravnoj ploči. O koeficijentu otpora biti će detaljnije riječ u kasnijim poglavljima.



Slika 4.2 - prikaz ovisnosti koeficijenta otpora $C_w = 2W/\rho v_\infty^2 b l$ za opstrujavani eliptični profil o Reynolds-ovom broju $Re = v_\infty l / \nu$.

4.2 Mirno i silovito tečenje

U otvorenim koritima ili u djelomično ispunjenim cjevovodima odvija se tečenje sa slobodnim vodnim licem. U tim slučajevima tečenja gravitacija ima vrlo bitnu ulogu. Neovisno o tome da li se tečenje odvija u turbulentnom ili laminarnom režimu može se provesti još jedna podjela tečenja koja u osnovi komentira odnos gravitacionih i inercionih sila odnosno kvantificira učešće gravitacionih sila u inercionoj rezultanti. Bezdimenzionalni parametar kojim je opisan taj odnos naziva se Froude-ov broj a za pravokutno korito iznosi:

$$Fr = v/(gh)^{1,5} \quad \text{za pravokutno korito} \quad (4.2)$$

gdje je:

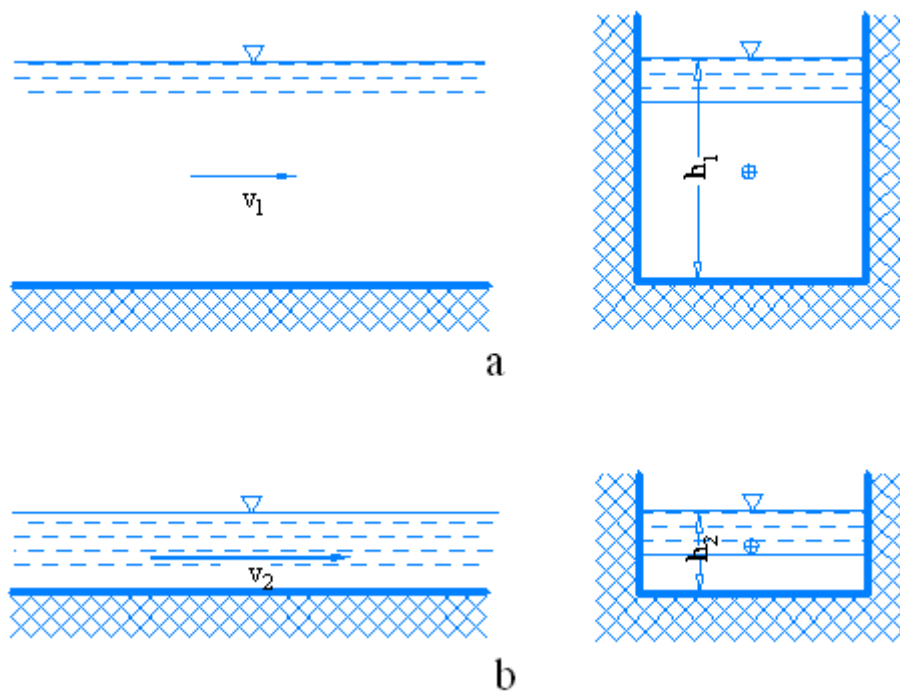
v – brzina

g – gravitaciono ubrzanje

h - dubina

Ukoliko je $Fr > 1$ tečenje je silovito, pri $Fr < 1$ tečenje je mirno a pri $Fr = 1$ tečenje je kritično. Prijelaz iz mirnog u siloviti režim odvija se kontinuirano kroz neku duljinu dionice tečenja, dok se prijelaz iz silovitog u miran režim ostvaruje sa relativno lokalnim diskontinuitetom nazvanim «vodni skok». U kasnijim poglavljima o otvorenim tokovima dati će se detaljnija analiza vezana uz ovu problematiku.

Za ilustraciju promatra se kanal presjeka kao na slici 4.3. Ukoliko kroz presjek kanala protiče isti protok Q (m^3/s) pri «malom» i «velikom» nagibu dna kanala opaziti će se «velike» i «male» dubine i pripadne «male» i «velike» brzine u kanalu.



Slika 4.3 – tečenje u otvorenom koritu (a – mirno tečenje ; b – silovito tečenje)

5 Zakon očuvanja mase

5.1 Uvod

Prema pojmovnom shvaćanja kontinuuma se u jednom određenom vremenskom trenutku t u materijalnom volumenu $V(t)$ nalazi se određena količina tekućine izražena masom m koja je kontinuirano raspoređena sa elementarnim masama $dm = \rho dV$. Uvjet kontinuiteta govori o tome da u volumenu $V(t)$ nema «praznog» prostora a zakon očuvanja mase da u jednom materijalnom volumenu tekućine ograničenom sa oplošjem $A(t)$ tekućina ne može nestajati ni nastajati. Matematička formulacija zakona očuvanja mase glasi:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad ; \quad m(t) = \int_{V(t)} \rho dV \quad (5.1a,b)$$

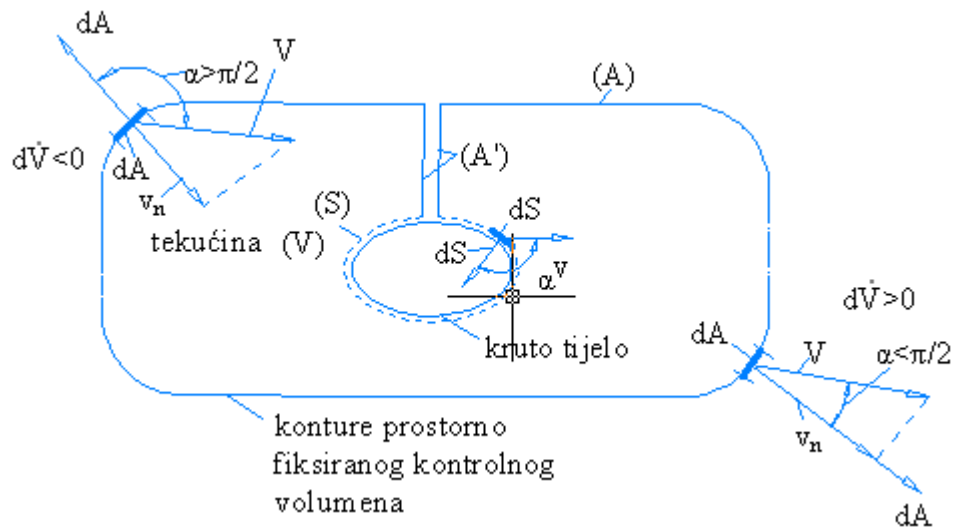
Gustoća u unutrašnjosti kontrolnog volumena $\rho = \rho(t, \mathbf{r})$ može biti promjenljiva u vremenu i u prostoru. Važno je primijetiti da je u izrazu 5.1a korištena supstancijalna odnosno totalna derivacija. Ukoliko se u odabranom materijalnom volumenu ipak nalazi ponor ili izvor kroz koje se ukupna promjena mase u vremenu smanjuje ili povećava uobičajeno je da se takve singularne točke ne tretira kao točke unutar materijalnog volumena već da se njihov utjecaj definira kroz prostorno raspoređene «porozne» rubove materijalnog volumena.

5.2 Jednadžba kontinuiteta za kontrolni volumen

U praktičnom smislu rješavanja problema uobičajeno je integralne jednadžbe referencirane na materijalni volumen $V(t)$ i oplošja materijalnog volumena $A(t)$ prebaciti u formu prostorno fiksiranog kontrolnog volumena i njemu pripadne oplošne površine (kontrolna površina). Na slici 5.1 dan je prikaz kontrolnog volumena čija se kontrolna površina može podijeliti na «slobodni» dio A i dio površine koja se nalazi na kontaktu sa krutim tijelom S . Primjenom transportnog teorema iz poglavlja 3.5.3 te odabirom karakteristika volumena $J = m$ i karakteristične gustoće $\varepsilon = \rho$ dobiva se:

$$\frac{dm}{dt} = \int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{(A)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int_{(S)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (5.2)$$

Jednadžba 5.2 predstavlja matematičku integralnu formulaciju zakona očuvanja mase odnosno jednadžbu kontinuiteta.



Slika 5.1 – prikaz kontrolnog volumena i kontrolnih površina oko krutog tijela

Ukupna (supstancijalna) promjena mase u vremenu sastoji se od lokalne promjene (prvi član sa lijeve strane) i različit je od 0 u slučaju nestacionarnog tečenja. Preostali dio desne strane su konvektivni članovi koji predstavljaju tok (eng: flux) mase kroz odabrane kontrolne površine A i S a ovisan o brzini okomitoy na površinu v_n i veličini dA i dS . Ukazuje se na činjenicu da samo normalna komponenta brzine može prenositi neku količinu tekućine, dok tangencijalna komponenta brzine v_t utječe samo na deformaciju djelića tekućine unutar kontrolnog volumena. Ukoliko je vektor brzina usmjeren prema van odnosno istog smjera kao i vanjska normala kontrolne površine dA i dS onda su $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ i $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ pozitivni i obratno. Iz slike 5.1 razvidno je i to da vektori vanjske normale kontrolne površine dS uvijek gleda u smjeru krutog tijela.

U unutrašnjosti kontrolnog volumena mogu se pojavljivati i nehomogenosti gustoća. Kroz površinu A' proticati će jednaka količina tekućine u smislu izlaza iz kontrolnog volumena kroz nju i ulaza u kontrolni volumen kroz nju. Zbog toga integral po tom dijelu kontrolne površine nije ni zapisan u jednadžbi 5.2. Naravno, odabir dijela slobodne kontrolne površine A' mora biti takav da se između $A'_{(lijevo)}$ i $A'_{(desno)}$ ne nalaze ponori ili izvori.

Upotrebom Green-Gauss-Ostrogradski teorema dvostruki integrali po kontrolnim površinama pretvaraju se u volumne integrale a čime se dobiva:

$$\frac{dm}{dt} = \int_{(V)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right] dV \quad (5.3)$$

Primjenom prve leme variacionog računa kojom se tvrdi da vrijednost integrala može biti 0 samo ukoliko je podintegralna funkcija također 0, dobiva se i prelazak na diferencijalnu formu jednadžbe kontinuiteta neovisno o izboru koordinatnog sustava uz pretpostavku odsustva ponora i izvora ($dm/dt = 0$):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (5.4)$$

U kartezijevom koordinatnom sustavu jednadžba kontinuiteta glasi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Prikazana vektorska parcijalna diferencijalna jednadžba kontinuiteta 5.4 vrijedi za opći slučaj u mehanici tekućina bez obzira radi li se o stišljivoj ili nestišljivoj tekućini. Pri rješavanju praktičnih problema u kojima se analizira stacionarno tečenje član lokalne promjene je $\partial \rho / \partial t = 0$. Ukoliko je promatrana tekućina homogena gustoće tada je i član $\mathbf{v} \operatorname{grad} \rho = 0$. Budući da je $\rho \neq 0$, slijedi $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. U tablici 5.1 dan je prikaz komponenti jednadžbe kontinuiteta koje se ne mogu zanemariti ovisno o prirodi analiziranog problema.

Jednoliko i stacionarno jednodimenzionalno tečenje nestišljive tekućine	$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$
Dvodimenzionalno stacionarno tečenje nestišljive tekućine	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$
Trodimenzionalno stacionarno tečenje nestišljive tekućine	$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
Nestacionarno tečenje stišljive tekućine pri brzinama manjim od brzine zvuka (vodni udar)	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$
Nestacionarno tečenje stišljive tekućine pri brzinama zvuka	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$

Tablica 5.1 - prikaz komponenti jednadžbe kontinuiteta koje se ne mogu zanemariti ovisno o prirodi analiziranog problema

6 Zakon očuvanja količine gibanja

6.1 Uvod

Poveznica između kinematike i dinamike naziva se i kinetika. Pri promatranju tekućina koje se nalaze u mirovanju ili se gibaju jednoliko po pravcu kinematika nema svoje učešće a na svaki djelić tekućine unutar promatrane prostorne domene sve vanjske sile koje na njega djeluju nalaze se u ravnoteži. Za potpuni opis tečenja je u općem slučaju potrebna i eksploatacija jednadžbe kontinuiteta zajedno sa dinamičkim jednadžbama koje će se izvesti u ovom poglavlju.

Osnovni zakon u dinamici tekućina je drugi Newtonov zakon koji kaže da je brzina promjene količine gibanja (ili ukupna promjena količine gibanja $d(mv)$ u vremenu dt) jednaka vektorskoj sumi (rezultanti F) svih vanjskih sila koje djeluju na tekućinu u materijalnom volumenu $V(t)$:

$$\frac{d(mv)}{dt} = F \quad ; \quad mv(t) = \int_{V(t)} \rho v dV \quad (6.1a,b)$$

Jednadžba 6.1 je vektorska jednadžba zbog čega ju je moguće prikazati i po komponentama, primjerice sa 3 jednadžbe po smjerovima kartezijevog koordinatnog sustava. Vanjske sile dijele se na površinske (sile tlaka i posmika) i volumne (gravitacione) dok se unutrašnja naprezanja odnosno sile međusobno poništavaju.

Jednadžba 6.1 nema ograničenja i može se upotrebljavati pri analizi tečenja u kojem se pojavljuju gubici mehaničke energije ili lokalne nehomogenosti gustoća a izmjena topline sa okolinom kroz granice materijalnog volumena nema utjecaja. Jednadžba 6.1 odnosi se na apsolutno kretanje koje se promatra sa fiksiranog položaja u prostoru. Ukoliko se pokaže potreba za analizu u relativnom koordinatnom sustavu koji se kreće sa tekućinom potrebne su još neke dodatne analize.

U rješavanju inženjerskih zadataka iz mehanike tekućina vrlo često je potrebno analizirati dinamičku jednadžbu, jednadžbu kontinuiteta i energetska jednadžbu zajedno. Za detaljni uvid u izvode energetskih jednadžbi upućuje se na literaturu ---.

6.2 Zakon očuvanja količine gibanja za kontrolni volumen

U inženjerskoj praksi je rjeđi slučaj primarnog interesa za određivanje gibanja pojedinih djelića tekućine, već se češće analizira djelovanje na površini nekog definiranog volumena tekućine. Na isti način kako je to prikazano i u poglavlju o zakonu o očuvanju mase (jednadžba kontinuiteta) te formulirano kroz transportni teorem provodi se zamjena materijalnog volumena $V(t)$ i pripadnog oplošja $A(t)$ u kontrolni volumen (V) i njemu pripadno oplošje (A) + (S) (vidi sliku 5.1).

Primjenom transportnog teorema iz poglavlja 3.5.3 te odabirom karakteristika volumena $\mathbf{J} = m\mathbf{v}$ i karakteristične gustoće $\varepsilon = \rho \mathbf{v}$ dobiva se:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \int_{(V)} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_{(A)} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int_{(S)} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \quad (6.2)$$

Jednadžba 6.2 predstavlja matematičku integralnu formulaciju zakona očuvanja količine gibanja odnosno drugi Newton-ov aksiom.

Ukupna (supstancijalna) promjena količine gibanja u vremenu sastoji se od lokalne promjene (prvi član sa lijeve strane) i različit je od 0 u slučaju nestacionarnog tečenja. Preostali dio desne strane su konvektivni članovi koji predstavljaj tok (eng: flux) količine gibanja kroz odabrane kontrolne površine A i S ovisne o brzini okomitoy na površinu v_n i veličini dA i dS .

Kroz površinu A' proticati će jednaka količina gibanja u smislu izlaza iz kontrolnog volumena kroz nju i ulaza u kontrolni volumen kroz nju. Zbog toga integral po tom dijelu kontrolne površine nije ni zapisan u jednadžbi 6.2. Naravno, odabir dijela slobodne kontrolne površine A' mora biti takav da se između $A'_{(lijevo)}$ i $A'_{(desno)}$ ne nalaze ponori ili izvori. Integral po kontrolnoj površini (S) imati će učešće samo ukoliko se na kontaktnoj površini sa krutim tijelom ostvaruje usisavanje ili istjecanje sa nekom brzinom $\mathbf{v} \neq 0$.

6.2.1 Utjecaj sila

Rezultanta \mathbf{F} u jednadžbi 6.1 dobiva se vektorskom sumom svih sila koje djeluju na materijalni volumen u kretanju. Kako bi se prešlo na analizu sa kontrolnim volumenom potrebno je definirati pripadne kontrolne površine A i S . Slučaj sa mirovanjem ili jednolikim gibanjem po pravcu pojavljuje se u slučaju kada su sve vanjske masene sile i sile tlaka u ravnoteži ($\mathbf{F} = 0$). Pri tečenju

realne tekućine gdje nije zadovoljen uvjet ravnoteže ($\mathbf{F} \neq 0$) a pojavljuju se i dodatna naprezanja koja se integracijom po površini daju silu viskoznosti.

Kroz pojavu turbulencije gibanje tekućine postaje «kaotično» pri čemu se pojavljuju i dodatne izmjene količine gibanja između djelića tekućine. Prema d'Lamberovom principu, ravnoteže sila u kretanju, nastale promjene količine gibanja mogu se shvatiti kao sile turbulencije koje se djelujući na površinu pretvaraju u naprezanja (virtualna naprezanja).

U kontrolnom volumenu (V) tekućina je kontinuirano raspodijeljena sa masenim elementima (djelićima) $dm = \rho dV$. Masene sile koje djeluju na te elemente su izražene sa $d\mathbf{F}_m = \mathbf{f}_m dm = \rho \mathbf{f}_m dV$ a uzročnici njihovog djelovanja su polje gravitacije ili elektromagnetsko polje. Rezultantna masena sila dobiva se integracijom po odabranom volumenu (V).

Ukoliko u nekom tijelu postoji stanje naprezanja onda po njegovom oplošju također moraju djelovati naprezanja koja se opisuju tenzorom naprezanja ($\boldsymbol{\sigma}$). Ovisno o polju naprezanja na djelić tekućine volumena dV djeluju sila naprezanja $d\mathbf{F}_\sigma = \text{div}(\boldsymbol{\sigma})dV$. Rezultantna sila naprezanja dobiva se integracijom po volumenu (V).

$$\mathbf{F}_m = \int_{(V)} \rho \mathbf{f}_m dV \quad , \quad \mathbf{F}_\sigma = \int_{(V)} \text{div}(\boldsymbol{\sigma})dV = \oint_{(A+S)} \boldsymbol{\sigma} d(A+S) \quad (6.3a,b)$$

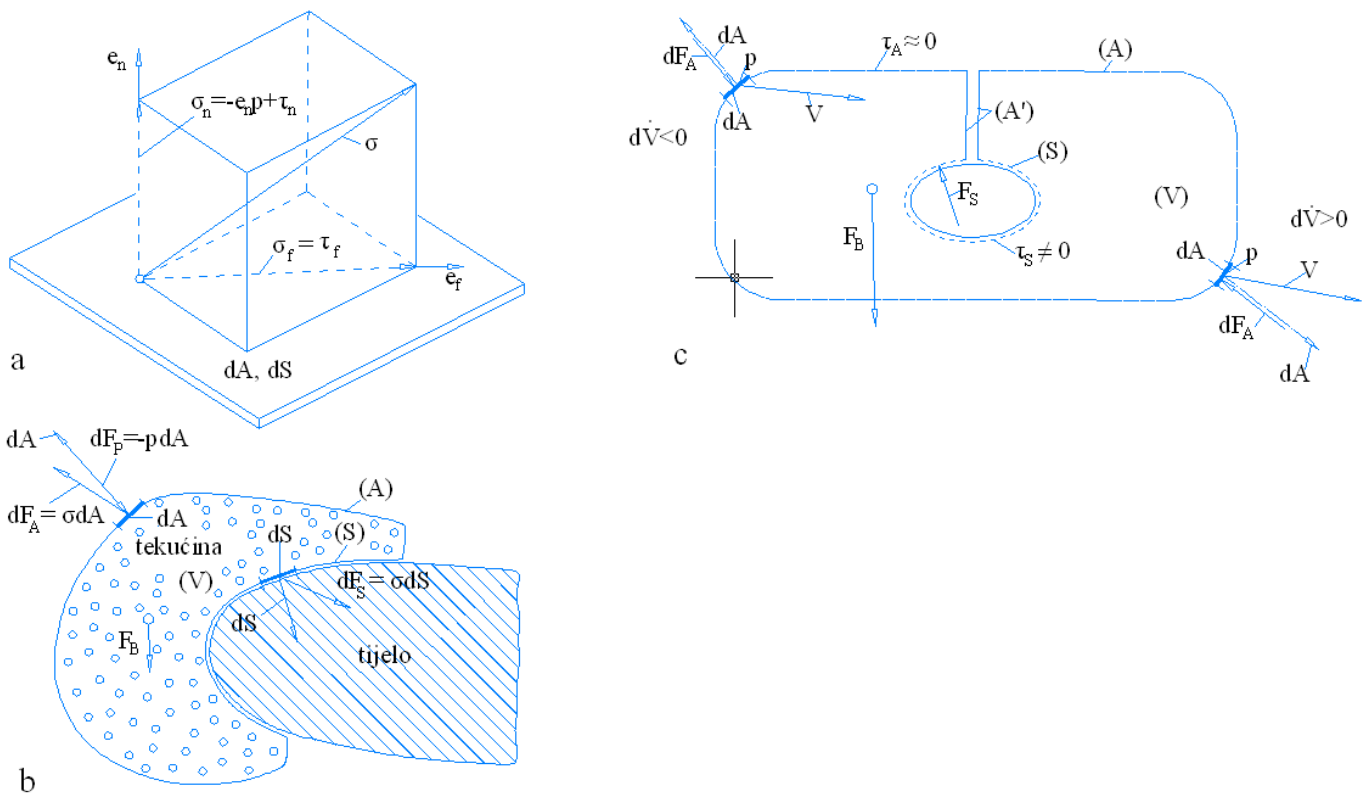
zadnji član desne strane izraza 6.3b dobiva se primjenom proširenja Green-Gauss-Ostrogadski teorema na tenzore. Obzirom da se pri određivanju \mathbf{F}_m integrira po volumenu pojam masenih sila može se zamijeniti sa pojmom volumnih sila a obzirom da i površinske sile i volumne sile djeluju «izvana» mogu se nazvati zajedničkim nazivom «vanjske sile» $\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_m + \mathbf{F}_{\sigma a}$. Unutarnje sile se poništavaju zbog čega je i rezultanta unutrašnjih sila $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{\sigma i} = 0$ uz napomenu da volumne sile \mathbf{F}_m ne pripadaju u unutarnje sile. Iz jednadžbe 6.3b također je razvidno da samo sile naprezanja djeluju po oplošju ($A+S$) volumena (V). Na temelju provedenog izvoda se sila \mathbf{F} u kontrolnom volumenu (V) sastoji od masene sile $\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_m$, zatim sile naprezanja \mathbf{F}_A po površini A (slobodna površina kontrolnog volumena) i sile naprezanja \mathbf{F}_S po kontaktnoj površini sa krutim tijelom S (vidi sliku 6.1c).

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_S \quad (\text{ukupna resultantna vanjskih volumnih i površinskih sila}) \quad (6.4)$$

Prema 6.3a masena (volumna) sila u kontrolnom volumenu iznosi ($f_m = f_B$):

$$\mathbf{F}_B = \int_{(V)} \rho \mathbf{f}_B dV \quad ; \quad \mathbf{F}_B = \mathbf{F}_G = m\mathbf{g} \quad (6.5)$$

pri čemu je tretiran samo utjecaj gravitacione sile sa gravitacionim ubrzanjem $f_B = g$.



Slika 6.1 – djelovanje normalnih i tangencijalnih naprezanja na delić kontrolne površine dA i dS (a) i djelujuće sile na kontrolni volumen (V) sa kontrolnom površinom (A+S) (b,c)

Sile naprezanja (površinske sile) sastoje se od sila koje djeluju tangencijalno i normalno na promatrane površine A i S. Ukoliko se sa $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\sigma}_t$ označi vektor rezultantnog naprezanja na jedan djelić površine A ili S, vanjske površinske sile iznose $dF_A = \boldsymbol{\sigma} dA$ i $dF_S = \boldsymbol{\sigma} dS$ i uvijek imaju smjer kao i $\boldsymbol{\sigma}$. Prema tome ukupna sila na kontrolnu površinu (A+S) iznosi:

$$\mathbf{F}_{(A+S)} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_S = \int_{(A)} \boldsymbol{\sigma} dA + \int_{(S)} \boldsymbol{\sigma} dS \quad \text{sa} \quad \boldsymbol{\sigma} = -e_n p + \boldsymbol{\tau} \quad (6.6)$$

Vektor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$ sastoji se od dijela doprinosa tlaka $-e_n p$, gdje je \mathbf{e}_n jedinični vektor normale na površinu a p tlak (skalar) okomit na promatrani djelić površine, i dijela $\boldsymbol{\tau}$ koji je uzrokovan

viskoznošću (trenjem). Moguća je i daljnja podjela $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_n + \boldsymbol{\tau}_t$ na normalnu i tangencijalnu komponentu pri čemu se $\boldsymbol{\tau}_t$ nalazi u ravnini promatranog djelića površine.

Na slobodnom dijelu kontrolne površine (A) su kroz turbulenciju i viskozitet uzrokovana naprezanja $\boldsymbol{\tau}_A$ mala naspram naprezanja tlaka p ($\boldsymbol{\sigma}_A \approx -\boldsymbol{e}_n p$; $\boldsymbol{\tau} \approx 0$). Na kontaktnoj površini sa krutim tijelom mogu se međutim pojaviti i naprezanja od tlaka i naprezanja od trenja ($\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{e}_n p + \boldsymbol{\tau}$). Uvođenjem pozitivno orijentirane vanjske normale (prema van) djelića površine $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_n dA$ i $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_n dS$ iz jednadžbe 6.6 dobiva se:

$$\boldsymbol{F}_A \approx \boldsymbol{F}_P = - \int_{(A)} p d\boldsymbol{A} \quad ; \quad \boldsymbol{F}_S = - \int_{(S)} p d\boldsymbol{S} + \int_{(S)} \boldsymbol{\tau} d\boldsymbol{S} = - \boldsymbol{F}_K \quad (6.7a,b)$$

Sila \boldsymbol{F}_A je približno jednaka sili \boldsymbol{F}_P na slobodnom dijelu kontrolne površine (A) a može se shvatiti i kao sila koja drži slobodnu kontrolnu površinu (A) na konstantnom položaju u strujnom polju.

\boldsymbol{F}_S je sila kojom tijelo djeluje na tekućinu u opstrujavanju oko njega i može se shvatiti kao sila koja drži kontaktnu kontrolnu površinu (S) na konstantnom položaju u strujnom polju.

Prema konceptu graničnog sloja, o kojem će detaljnije biti riječ u poglavljima koja slijede, na kontaktnoj površini sa krutim tijelom gdje se formira granični sloj moguće je zanemariti normalna naprezanja uzrokovana trenjem $\boldsymbol{\tau}_n$ naspram tlakova p zbog čega vrijedi i približni odnos $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_S \approx \boldsymbol{\tau}_t$. Pri tečenju bezviskozne (idealne) tekućine zanemaruje se utjecaj trenja ($\boldsymbol{\tau}_S = 0$) a izraz 6.7b sadrži samo integralni član tlaka $\boldsymbol{F}_S = - \int_{(S)} p d\boldsymbol{S}$.

Potrebno je i napomenuti da prema zakonu akcije i reakcije sila kojom kruto tijelo djeluje na tekućinu jednako je po intenzitetu i suprotnog smjera od sile kojom tekućina djeluje na tijelo te se može postaviti jednakost $\boldsymbol{F}_K = -\boldsymbol{F}_S$.

Prema slici 6.1 i iznesenim izvodima može se napisati i zakon očuvanja količine gibanja u integralnom obliku za kontrolni volumen:

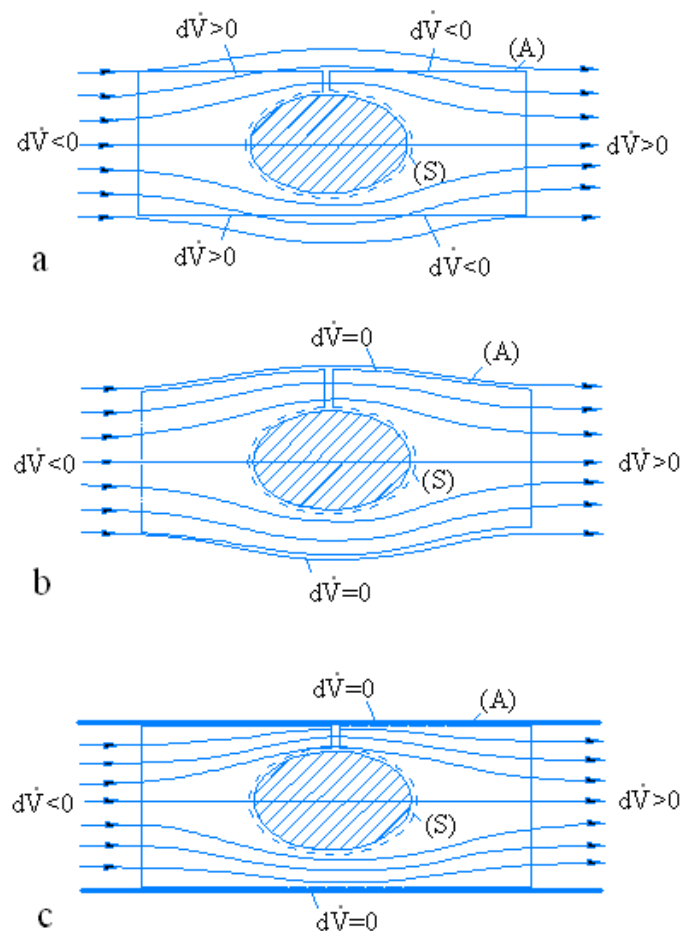
$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \int_{(V)} \frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} dV + \int_{(A)} \rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A} + \int_{(S)} \rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_S \quad (6.8)$$

Istovremeno sa rješavanjem vektorske jednačbe 6.8 potrebno je i zadovoljenje jednačbe kontinuiteta. Pri analizi slučaja stacionarnog tečenja u kojem je prvi član desne strane jednačbe 6.8 jednak 0, granična ploha krutog tijela (S) je neporozna (nema ponora ni izvora količine gibanja) te korištenjem jednačbe 6.7 dobiva se izraz:

$$\int_{(A)} [\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) + p d\mathbf{A}] = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S, \quad \int_{(A)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \text{ (jednačba kontinuiteta)}, \quad (\mathbf{v}_S = 0) \quad (6.9a,b)$$

Jednačba 6.9a zove se i impulsna jednačba a zajedno sa jednačbom kontinuiteta daje rješenje velikog broja zadaća koje se pojavljuju u domeni dinamike tekućina. Kako se iz jednačbi kontinuiteta i impulsne jednačbe može vidjeti, za njihovo rješavanje nije potrebno poznavati karakteristike tečenja unutar samog kontrolnog volumena već samo kroz kontrolnu površinu koja mu je oplošje.

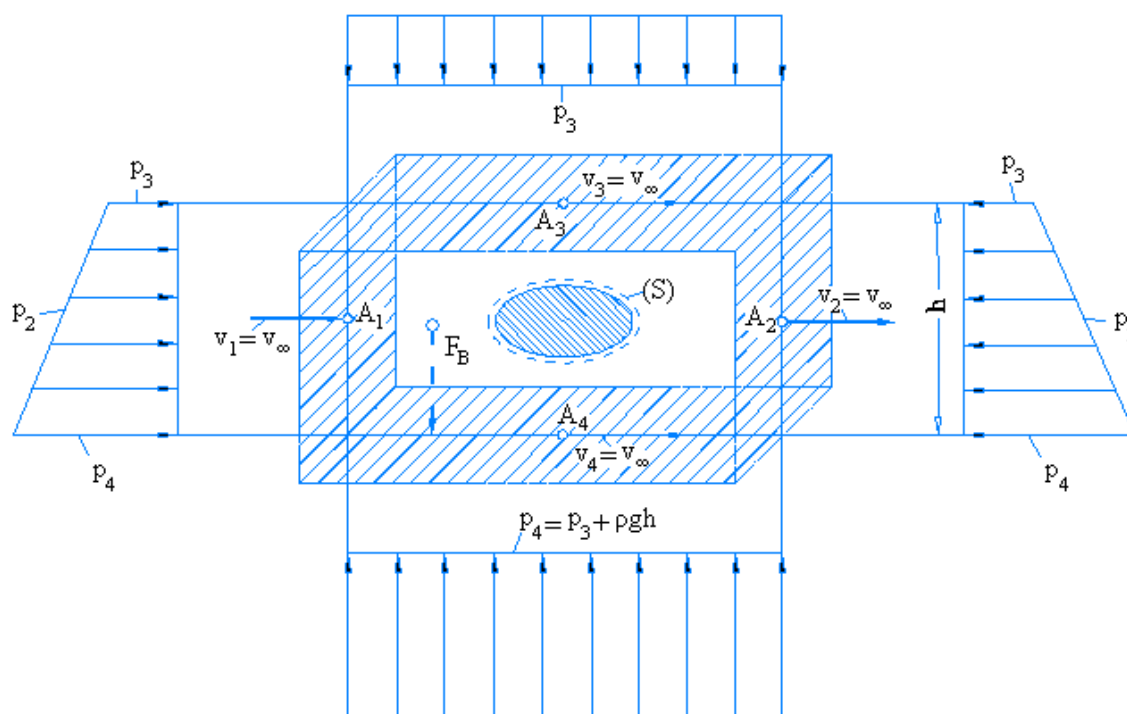
Odabir kontrolnog volumena prikazan je na slici 6.2 gdje svaki do odabira ima svojih prednosti i nedostataka.



Slika 6.2 - izbor slobodnog dijela kontrolne površine (A)

Na slici 6.2a je slobodni dio kontrolne površine (A) odabran po načelu geometrijske jednostavnosti. Prednost pri tome odabiru sadržan je u jednostavnijem proračunu volumnih i površinskih sila prema 6.5a i 6.7a dok je određivanje toka (eng:flux) količine gibanja kroz (A) složen. Taj problem može se izbjeći ukoliko se horizontalni dijelovi slobodne površine postave na dostatnu udaljenost tako da je tlak p u njima približno konstantan. Time je integracija prema 6.7a znatno pojednostavljena. Na slici 6.2b je slobodni dio kontrolne površine (A) odabran po načelu polja strujanja pri kojem se dijelovi slobodne kontrolne površine postavljaju ili okomito ili tangencijalno na strujnice. U ovakvom izboru problem je sadržan u tome da su tlakovi p uzduž «gornje» i «doljnje» strujnice promjenljivi a prednost u tome da nema toka količine gibanja kroz njih zbog čega se integracija u izrazu 6.8 provodi samo po «ulaznoj» i «izlaznoj» površini. Na slici 6.2c je slobodni dio kontrolne površine (A) odabran u vidu «prisilnog» uvjeta. Karakteristični primjer takvog odabira je promatranje opstrujavanja tijela položenog u cijevi sa nepropusnim granicama kroz koje nema toka. Ukoliko se traži sila kojom kruto tijelo u cijevi djeluje na tekućinu koja ga opstrujava i koja djeluje u smjeru osi cijevi, učesće sile tlaka po površini cijevi može se zanemariti budući da sila tlaka ima okomit smjer na os cijevi.

U nastavku se daje i primjer određivanja pojedinih vanjskih sila koristeći se zakonom o očuvanju količine gibanja za idealne (bezviskozne tekućine).



Slika 6.3 – djelovanja sila na kruto tijelo pri opstrujavanju nestišljive i idealne tekućine oko njega

Na slici 6.3 da ne prikaz krutog tijela volumena V_K koje se nalazi unutar kontrolnog volumena odabranog na način da se sve njegove plohe ($A_1 - A_6$) nalaze na dovoljnim udaljenostima od krutog tijela da se tečenje kroz njih odvija normalno (lijeva i desna površina) ili tengencijalno na njih (gornja, doljna, prednja ili stražnja površina).

Ukoliko se radi o tečenju idealne tekućine onda se strujnice odmah iza tijela vraćaju u svoj prvobitni položaj. Ukoliko nema ponora ili izvora kroz kontaktnu plohu kontrolne površine S onda je uvjet kontinuiteta sam po sebi zadovoljen. Isto tako odmah se može uočiti da nema promjene količine gibanja po prostoru (od lijeve do desne plohe slobodne kontrolne površine) zbog čega je potrebno riješiti samo jednakost $0 = F_B + F_A + F_S$. Ukoliko se od volumnih sila odabere samo utjecaj gravitacije dobiva se $F_B = \rho g(V) - \rho g V_K$ sa smjerom djelovanja vertikalno prema dolje. Na slici 6.3 prikazan je i dijagram tlakova po slobodnoj kontrolnoj površini (A) a pridružena rezultanta sile tlaka iznosi $F_A = (p_4 - p_3) A_3$ i usmjerena je vertikalno prema gore. Njihova vektorska suma daje rezultantu $F_B + F_A = -F_S = \rho g V_K$ a što je ustvari sila uzgona koja djeluje vertikalno prema gore. U horizontalnom smjeru gravitacija nema učešće a iz dijagrama tlakova očito je da se sile tlakova u horizontalnom smjeru poništavaju pa za horizontalnu komponentu vrijedi $F_S = 0$. Prema tome pri opstrujavanju idealne nestišljive tekućine oko čvrstog tijela sila otpora tijela biti će jednaka 0. Iz iskustva je poznato da to nije istina, budući da se naše iskustvo temelji na ponašanju realne a ne idealne tekućine.

6.3 Dinamičke jednadžbe (zakon očuvanja količine gibanja za djelić tekućine)

6.3.1 Osnovna dinamička jednadžba

U prethodnom poglavlju tretirana je integralna forma zakona očuvanja količine gibanja za prostorno strujno polje (kontrolni volumen). U ovom poglavlju daje se izvod diferencijalne forme zakona očuvanja količine gibanja koja u mehanici tekućina zajedno sa jednadžbom kontinuiteta daje dinamičke jednadžbe gibanja.

Rezultantna sila ΔF koja djeluje na djelić tekućine dobivena je vektorskom sumom svih na djelić tekućine djelujućih vanjskih sila (volumne-masene ΔF_m , površinske-naprezanja ΔF_σ). Sila ΔF_σ sastoji se od normalnih i tangencijalnih sila. Za rezultantu se može pisati i jednakost $\Delta F = \Delta F_B + \Delta F_P + \Delta F_Z + \Delta F_T$ gdje ΔF_P predstavlja komponentu tlaka odnosno srednji statički tlak ekstrahiran iz cjelokupnog stanja naprezanja a utjecaj trenja sadržan je u članovima $\Delta F_Z + \Delta F_T$ gdje se ΔF_Z

odnosi na silu stvarne viskoznosti kao fundamentalnom svojstvu realne tekućine a ΔF_T na silu «fiktivne» viskoznosti kojom se opisuje utjecaj «kaotičnog» turbulentnog gibanja realna tekućine odnosno (negativna) inerciona sila turbulentnog gibanja.

Ukoliko se u jednadžbu očuvanja količine gibanja uvede turbulencija onda se ne samo veličine brzina i ubrzanja već i veličina tlaka i gustoća moraju definirati na način koji će se opisati u slijedećim poglavljima (jednadžbe gibanja za turbulentno tečenje).

Za daljnju analizu je sve sile potrebno svesti na oblik masenih sila koje se odnose na djelić tekućine a što se dobiva dijeljenjem svake pojedine sile sa masom djelića tekućine ($f = \Delta F / \Delta m$):

$$a = dv/dt = f = f_B + f_P + f_R = f_B + f_P + f_Z + f_T \quad (6.10a,b)$$

Pri promatranju bezviskozne (idealne) tekućine, članovi $f_R = f_Z + f_T$ jednaki su nuli, što zajedno sa jednadžbom kontinuiteta daje Eulerovu dinamičku jednadžbu. Pri analizi laminarnog tečenja realne tekućine vrijedi $f_Z \neq 0$ i $f_T = 0$, a odgovarajuće dinamičke jednadžbe zovu se Navier-Stokesove jednadžbe. Ukoliko se promatra turbulentno tečenje realne tekućine ($f_Z \neq 0$, $f_T \neq 0$) provodi se postupak osrednjavanja članova tlaka i brzina u Navier Stokesovim jednadžbama a čime se dobivaju Reynolds-ove dinamičke jednadžbe.

6.3.2 Dinamička jednadžba za bezviskozne tekućine (Euler, Bernoulli)

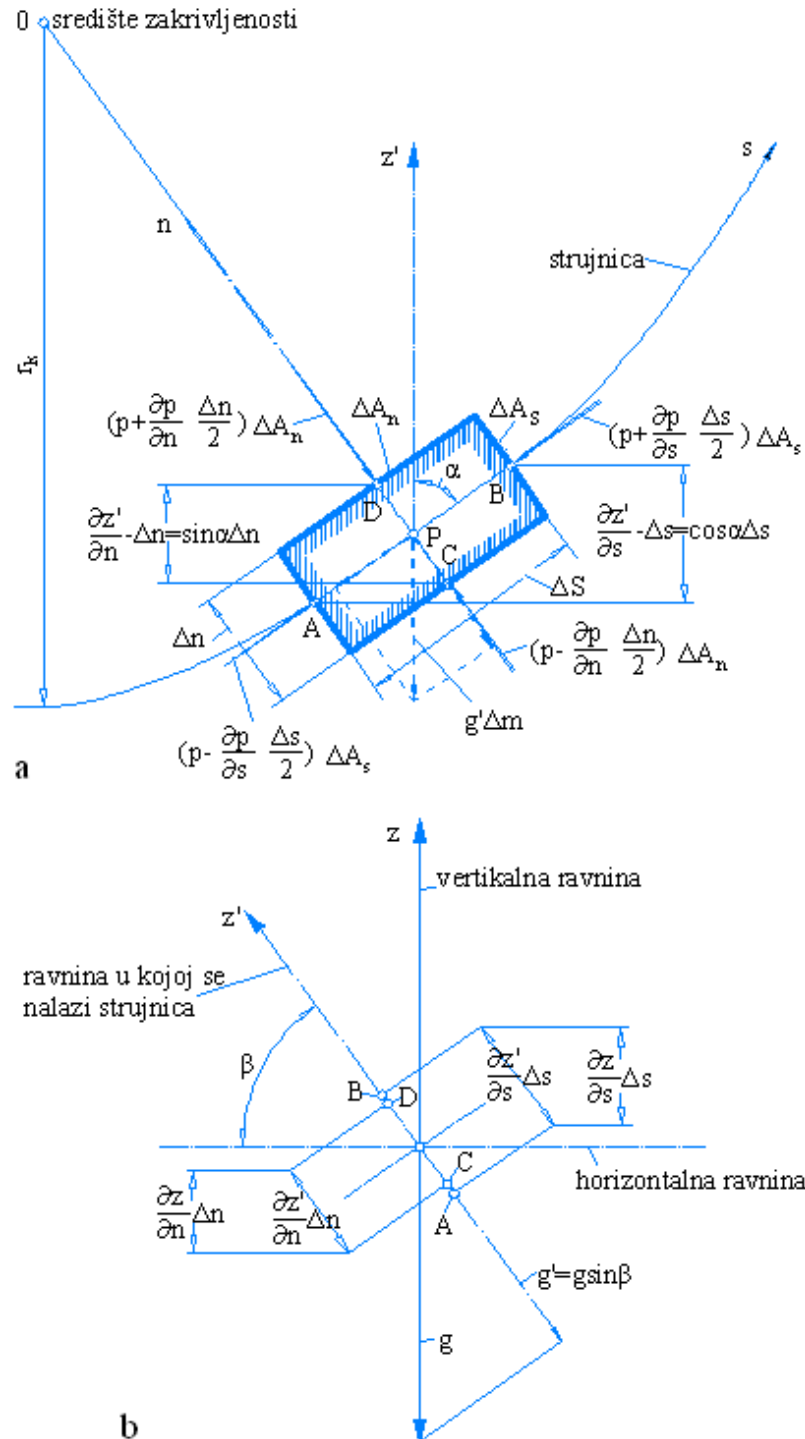
Gibanje djelića tekućine uzduž zakrivljene strujnice u ravnini slobodno položenoj u prostoru (razapetu sa točkom središta zakrivljenosti i elementarnim djelom strujnice ds) zajedno sa djelujućim silama prikazano je na slici 6.4a.

Na slici 6.4a prikazani element tekućine ima volumen $\Delta V = \Delta A_S \Delta n = \Delta A_n \Delta s$ i masu $\Delta m = \rho \Delta V$ giba se sa vremenski promjenljivom brzinom $v(t,s)$ u smjeru pružanja strujnice. Obzirom na odabranu slobodno položenu ravninu na masu djelića tekućine djeluje komponenta gravitacionog ubrzanja $g' = g \sin \beta$ a komponente masene sile u tangencijalnom i normalnom (radijalnom) smjeru iznose $f_{B_t'} = g \cos \alpha$ i $f_{B_n'} = -g \sin \alpha$. Komponente sila tlaka određene su također na površine ΔA_S u smjeru gibanja i ΔA_n okomito na njega. Rezultantna sila tlaka iznosi $\Delta F_P = [p - (\partial p / \partial s) (\Delta s / 2)] \Delta A_S - [p + (\partial p / \partial s) (\Delta s / 2)] \Delta A_S = - (\partial p / \partial s) \Delta V$. Uz odgovarajuće geometrijske odnose dobivaju se i komponente masenih sila i sila tlaka u tangencijalnom i normalnom (radijalnom) smjeru:

$$f_{B_t} = -g \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right), \quad f_{B_n} = -g \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right) \quad ; \quad f_{P_t} = -(1/\rho) \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right), \quad f_{P_n} = -(1/\rho) \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) \quad (6.11a;b)$$

iz čega je i dobivena Eulerova dinamička jednačba za tečenje bezviskozne (idealne tekućine):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} + g \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{r_k} + g \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (6.12a,b)$$



Slika 6.4a – prikaz gibanja djelića bezviskozne (idealne) tekućine uzduž zakrivljene strujnice i na njega djelujuće sile ($t = \text{konst.}$)

Iz danih jednadžbi može se uočiti da nagib proizvoljno odabrane ravnine naspram horizontalne ili vertikalne ravnine u prostoru ne igra nikakvu ulogu. Prvi članovi jednadžbi predstavljaju promjenu u vremenu (lokalna komponenta) drugi članovi predstavljaju promjenu po prostoru (konvektivna ili prenosna komponenta). Jednadžba je dimenzionalno homogena pa svi parcijalni članovi imaju jedinicu masene sile (m/s^2). U slučaju stacionarnog tečenja za članove lokalnih komponenti vrijedi $\partial v/\partial t = 0$ pa preostali članovi imaju još jedino ovisnost o prostornim koordinatama. Pri tome može se uvesti zamjena parcijalne i totalne (supstancijalne) derivacije $\partial / \partial t = d / dt$ a množenjem sa duljinom promatranog puta djelića tekućine ds dobiva se i diferencijalna forma energetske Bernoulli-jeve jednadžbe:

$$v dv + g dz + dp/\rho = 0 \quad (6.13)$$

a integracijom gornje jednadžbe dobiva se izraz:

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C \quad (6.14a)$$

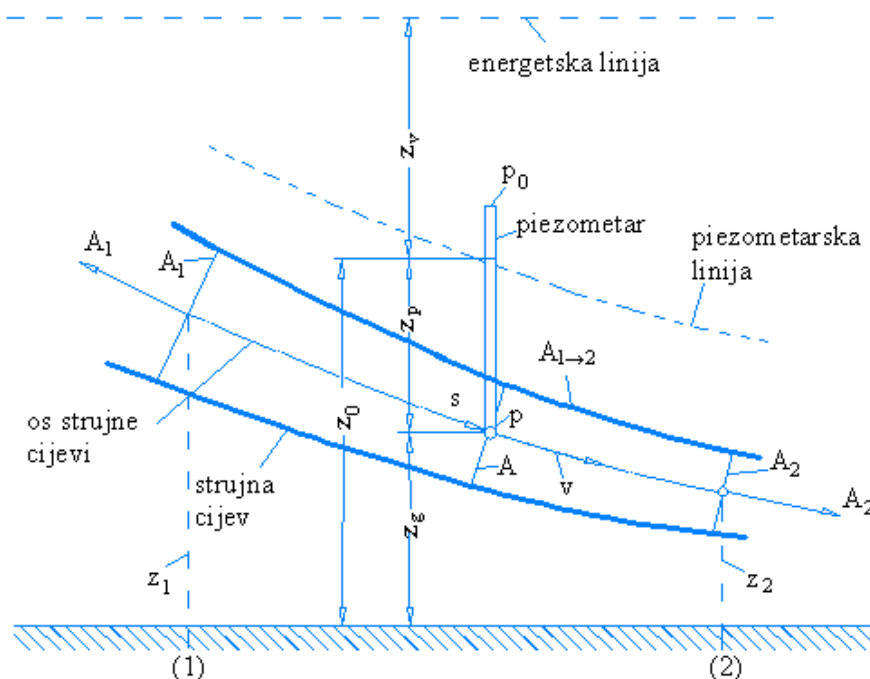
Položaj z određen je sa vertikalnom udaljenošću od referentne horizontalne ravnine a u općem slučaju integracijska konstanta C može biti različita od strujnice do strujnice. U slučaju kada se promatra stacionarno tečenje barotropne idealne (bezviskozne) tekućine integracijska konstanta C prelazi u opću konstantu ($C = \text{konst}$). za cijelu domenu strujnog polja.

Prvi član jednadžbe 6.14a odnosi se na kinetičku energiju, drugi član na energiju položaja a treći član na tlačnu energiju. Zbog praktičnih potreba u inženjerskoj praksi najčešće se upotrebljava tzv. visinski oblik koji se dobiva dijeljenjem članova jednadžbe 6.14a sa g nakon čega svi članovi imaju dimenziju duljine odnosno «visine» (jednadžba 6.14b). Takav izbor je vrlo zahvalan za grafičku prezentaciju udjela pojedine energije (energije položaja, tlaka i kinetičke energije) u ukupnoj mehaničkoj energiji (slika 6.4b).

$$\frac{v_i^2}{2g} + z_i + \frac{p_i}{\rho g} = \text{konst.} \quad (6.14b)$$

Jednadžba 6.14b važeća je i za stacionarno tečenje kroz strujnu cijev sačinjenu od niza paralelnih strujnica. Budući da pri stacionarnom tečenju strujnice ne mijenjaju geometrijsku formu u vremenu, strujna cijev može se shvatiti i kao stvarna cijev (npr. vodovodna cijev pod tlakom). U jednadžbi

6.14b korištene je indeksna oznaka « i » koja se odnosi na bilo koji vertikalni presjek strujne cijevi. Na slici 6.4b sa z_g označena je visina (razina) energije položaja točke P u nekom presjeku « i », sa z_p označena je pripadna visina (razina) energije tlaka a sa z_v označena je pripadna visina (razina) kinetičke energije. Vertikalna udaljenost z_g odnosno energija položaja može se odabrati od proizvoljne horizontalne referentne ravnine.



Slika 6.4b – grafički prikaz energetskih razina u presjeku strujne cijevi za stacionarno tečenje idealne tekućine

Kako se sa slike 6.4b može vidjeti energetska razina ukupne mehaničke energije je horizontalna linija što znači da nema gubitaka ukupne mehaničke energija od presjeka do presjeka uzduž strujne cijevi. Linija koja označava razinu ukupne mehaničke energije naziva se energetska linija. Važno je uočiti da u slučaju suženja poprečnog presjeka strujne cijevi kao na slici 6.14b prema jednadžbi kontinuiteta za nestišljive tekućine mora doći i do povećanja brzina u smjeru tečenja (nejednoliko tečenje). Kako povećanje brzine prati i povećanje kinetičke energije, neki drugi oblik mehaničke energije mora se umanjiti kako bi ukupna mehanička energija ostala nepromijenjena. To povećanje kinetičke energije u slučaju prikazanom na slici 6.14b odvija se na račun energije tlaka i energije položaja, a u slučaju horizontalno položene cijevi, povećanje kinetičke energije pratio bi samo pad tlačne energije. Linija kojom se prikazuje ukupna razina tlačne energije i energije položaja zove se piezometarska linija. Piezometarska linija nikada ne može biti iznad energetske linije a u mirovanju energetska linija i piezometarska linija se poklapaju.

Promjene koje će nastupiti kroz tretman realne tekućine, koja je ipak od primarnog tehničkog interesa, biti će objašnjene u kasnijim poglavljima.

Uvođenjem potencijala vanjskih sila u_B iz kojeg se mogu izvesti masena sila f_B i sila tlaka f_P u općem slučaju promatranja gibanja bezviskozne (idealne) tekućine u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu vektorska dinamička Euler-ova jednadžba u vektorskom zapisu (6.15a) i po komponentama kartezijevog x,y,z sustava (6.15b,c,d) glasi :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } u_B - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (6.15a)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_B}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6.15b)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_B}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (6.15c)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial u_B}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (6.15d)$$

Za potpuni opis strujnog polja osim dinamičkih jednadžbi mora se voditi računa i o zadovoljavanju uvjeta jednadžbe kontinuiteta.

Prema jednadžbi 3.7c i 6.14a Bernoulli-jeva jednadžba se također može zapisati i u obliku:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) + \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (6.16)$$

Budući da je $\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \text{konst.}$ onda je i $\text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = 0$ pa se dobiva pojednostavljeni

izraz $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0$ nad kojim se primjenom operatora rot dobivaju slijedeći izrazi :

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) - \text{rot} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \text{rot} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (6.17)$$

gdje je $\boldsymbol{\omega} = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}$ vektor vrtložnosti prema 3.9a,b. Jednadžba 6.17 ustvari kazuje da je svako bezvrtložno tečenje ($\boldsymbol{\omega} = 0$) ustvari rješenje Eulerove dinamičke jednadžbe. Bezvrtložno i bezviskozno tečenje (strujanje) naziva se potencijalno strujanje budući da se polje strujanja može opisati sa izrazom $\mathbf{v} = \text{grad } \Phi$ u kojem Φ ima značenje skalarnog brzinskog potencijala. Jednadžba

kontinuiteta također mora biti uzeta u obzir kao i u svim ostalim slučajevima provedene analize u dinamici tekućina.

6.3.3 Dinamička jednadžba za laminarno tečenje realne tekućine

Eksperimentalna istraživanja su pokazala da u nekim realnim slučajevima analize tečenja realne tekućine, matematički tretman Eulerovih dinamičkih jednadžbi za idealne tekućine zajedno sa jednadžbom kontinuiteta daje vrlo dobre rezultate. S druge strane, u mnogim slučajevima primjenom Eulerove jednadžbe u kojoj je zanemarena viskoznost tekućina dobivaju se rješenja koja u velikoj mjeri odstupaju od rezultata eksperimentalnog mjerenja. Najveće razlike dobivaju se u analizi tečenja u blizini čvrste-krute granice kao i u području granica slobodnog mlaza gdje je u oba slučaja zajednička činjenica da viskoznost ima vrlo važnu ulogu.

U laminarnom režimu tečenja nema učešća masene sile turbulencije pa izraz 6.10 prelazi u oblik:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{f}_B + \mathbf{f}_P + \mathbf{f}_Z \quad (6.10a,b)$$

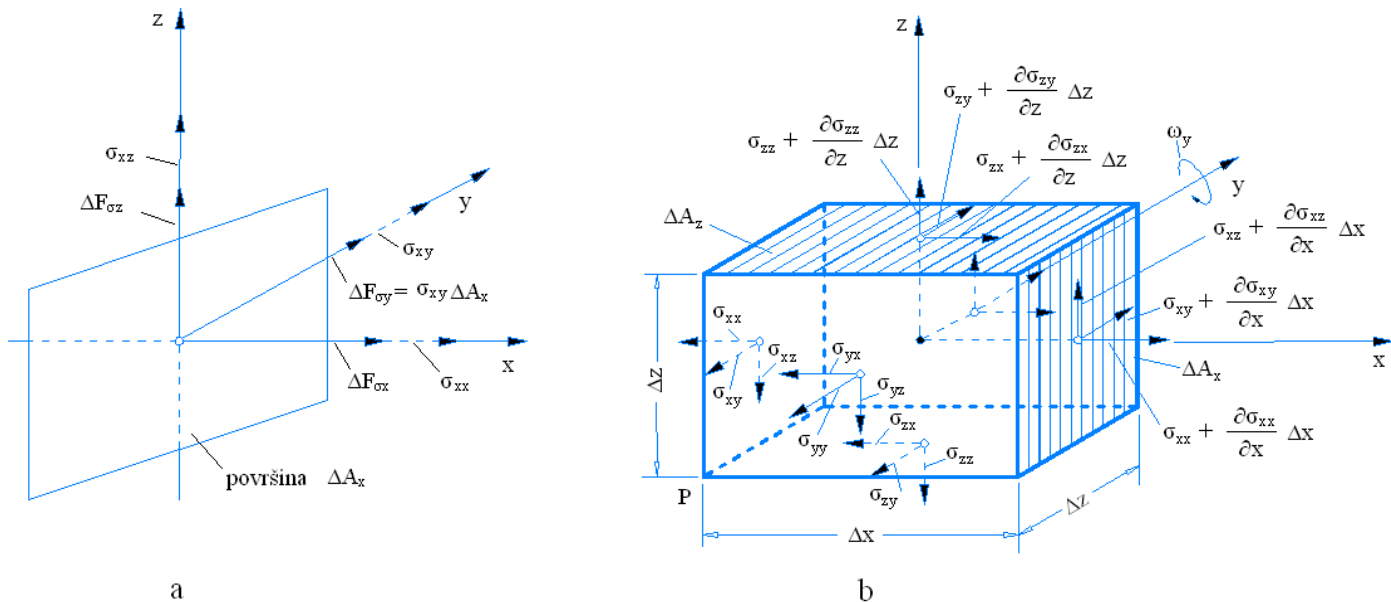
U odnosu na prethodnu analizu bezviskozne (idealne) tekućine uveden je i član sile \mathbf{f}_Z (na jediničnu masu) kojom je obuhvaćen utjecaj viskoznosti i posljedične sile trenja. Uvođenjem konstitutivne jednadžbe za Newtono-ovu tekućinu definiran je proporcionalni odnos između tangencijalnih naprezanja i promjene brzina u smjeru okomitom na smjer tečenja (vid poglavlje 1.3). Pri tome djelić fluida trpi deformaciju u vidu promjene oblika a općenito se može prihvatiti da su normalna i tangencijalna naprezanja koja djeluju na taj djelić tekućine proporcionalna brzini promjene oblika. Upravo po tome razlikuju se tekućine od krutog tijela za koje vrijedi proporcionalan odnos između naprezanja i promjene oblika (Hookov zakon teorije elastičnosti) a ne brzine promjene oblika.

U izvodima laminarno tečenja realne tekućine potrebno je odrediti stanje naprezanja (σ) djelića tekućine u ovisnosti o stanju deformacija $def \nu$. Autori temeljnih radova u kojima su definirane upravo te ovisnosti su Navier (1823), Saint-Venant (1843) i Stokes (1845) te u relativno novije vrijeme Schlichting (1959) i White (1974).

Ukoliko se djelić površine okomite na x os označi sa ΔA_x (vidi sliku 6.5a) a sa ΔF_{σ_y} djelujuća tangencijalna komponenta naprezanja na površinu ΔA_x dobiva se analogno definiciji tlačnog naprezanja odgovarajuća komponenta tangencijalnog naprezanja:

$$\sigma_{xy} = \lim_{\Delta A_x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_{\sigma_y}}{\Delta A_x} = \frac{dF_{\sigma_y}}{dA_x}, \quad \sigma_{ij} = \frac{dF_{\sigma_j}}{dA_i} \quad (6.11a,b)$$

Na odgovarajući način dobivaju se komponente tangencijalnog naprezanja na djelić površine ΔA_x u z smjeru (σ_{xz}) i x smjeru (σ_{zx}). Na slici 6.5b prikazan je kvadratni djelić tekućine koja se giba u strujnom polju. Duljine rubova promatranog djelića su u smjerovima x , y , z označeni sa Δx , Δy i Δz a na oplošnim površinama promatranog djelića djeluje površinska naprezanja σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} odnosno σ_{xy} , σ_{xz} , σ_{yx} , σ_{yz} , σ_{zx} i σ_{zy} . Članovi sa istovjetnim oznakama ($i = j$) odnose se na normalna naprezanja a članovi sa indeksnim oznakama $i \neq j$ odnose se na tangencijalna naprezanja. Prema tome stanje naprezanja djelića tekućine u tečenju opisano je sa devet nepoznatih skalarnih veličina naprezanja koji sačinjavaju tenzor naprezanja (σ).



Slika 6.5 – Stanje naprezanja za djelić tekućine (a- definicija naprezanja na djeliću površine, b-komponente naprezanja na djeliću tekućine)

U stanju mirovanja ili u tečenju bezviskozne (idealne) tekućine su u točki P (vidi sliku 6.5b) sve normalne komponente su međusobno jednake i odgovaraju negativnom iznosu tlaka $\sigma_{ii} = -p$ a za tangencijalna naprezanja vrijedi $\sigma_{ij} = 0$ ($i \neq j$).

Analizom nejednolikog rotacionog gibanja oko neke od osi koja je paralelna sa nekom od koordinatnih osi x , y , z i koja prolazi kroz težište analiziranog djelića tekućine te rezultatnog momenta sila uslijed kutnog ubrzanja i masenih momenata inercije uz zanemarenije članova višeg reda pokazalo se da vrijedi $\sigma_{eji} = \sigma_{ij}$.

Prema provedenoj analizi mogu se zaključno definirati i zaključni izrazi za površinska naprezanja koja djeluju na djelić tekućine u laminarnom tečenju:

$$\sigma_{ii} = -p + \tau_{ii} \quad (i = 1,2,3), \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (i \neq j) \quad (6.12a,b)$$

Prema jednadžbi 6.12 normalna naprezanja sačinjena su od negativne vrijednosti tlaka ($-p$) i normalnih naprezanja uzrokovanih viskoznošću tekućine (τ_{ii}). U općem slučaju je $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$. Budući da vrijedi spomenuta jednakost $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ devet komponenti naprezanja čine jedan simetrični tenzor. Tangencijalna naprezanja ovisna su o viskoznosti te vrijede odnosi $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Odnos stanja naprezanja i stanja deformacija

Detaljnijom analizom i izvodom međusobnih odnosa stanja naprezanja i stanja deformacija za tekućinu dobivene su i komponente tenzora naprezanja u kartezijevom koordinatnom sustavu (6.13a,b,c \rightarrow x smjer ; 6.14a,b,c \rightarrow y smjer ; 6.15a,b,c \rightarrow z smjer) a za detaljan izvod upućuje se na referentnu literaturu.

$$\sigma_{xx} = -p + 2\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{1}{3} \operatorname{div} v \right), \quad \sigma_{xy} = \tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad \sigma_{yx} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad (6.13)$$

$$\sigma_{yx} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \quad \sigma_{yy} = -p + 2\eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{3} \operatorname{div} v \right), \quad \sigma_{yz} = \tau_{yz} = \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (6.14)$$

$$\sigma_{zx} = \tau_{zx} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \quad \sigma_{zy} = \tau_{zy} = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \sigma_{zz} = -p + 2\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \operatorname{div} v \right) \quad (6.15)$$

U slučaju dvodimenzionalnog tečenja ($\partial / \partial x_3 = 0$; $v_3 = 0$) nestišljive tekućine ($\rho = \text{konst.}$) i uz indeksnu notaciju sa značenjem $x_1 = x$, $x_2 = y$, $v_1 = u$, $v_2 = v$ dobiva se:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yy} = -p + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.16)$$

Sile naprezanja na djelić tekućine

Površinske sile koje djeluju na oplošne površine djelića tekućine prikazanog na slici 6.5 ($\Delta A_x = \Delta y \Delta z$, $\Delta A_y = \Delta x \Delta z$, $\Delta A_z = \Delta x \Delta y$) dobivaju se umnoškom naprezanja i pripadne površine a

rezultantne sile naprezanja po smjerovima za cijeli djelić tekućine izražene su slijedećim jednadžbama:

$$\Delta F_{\sigma_x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \Delta V \quad x \text{ smjer} \quad (6.16)$$

$$\Delta F_{\sigma_y} = \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \Delta V \quad y \text{ smjer} \quad (6.17)$$

$$\Delta F_{\sigma_z} = \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z = \left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \Delta V \quad z \text{ smjer} \quad (6.18)$$

Ukoliko se za vektor naprezanja površine ΔA_x usvoji $\sigma_x = e_x \sigma_{xx} + e_y \sigma_{xy} + e_z \sigma_{xz}$, za površinu ΔA_y $\sigma_y = e_x \sigma_{yx} + e_y \sigma_{yy} + e_z \sigma_{yz}$ i za površinu ΔA_z $\sigma_z = e_x \sigma_{zx} + e_y \sigma_{zy} + e_z \sigma_{zz}$ za rezultantne sile po smjerovima x, y, z može se pisati i $\Delta F_{\sigma_x} = \text{div} \sigma_x \Delta V$, $\Delta F_{\sigma_y} = \text{div} \sigma_y \Delta V$, $\Delta F_{\sigma_z} = \text{div} \sigma_z \Delta V$. Prema tome na djelić tekućine mase $\Delta m = \rho \Delta V$ djeluju sile naprezanja definirana izrazima:

$$f_\sigma = 1/\rho (e_x \text{div} \sigma_x + e_y \text{div} \sigma_y + e_z \text{div} \sigma_z) = 1/\rho \text{div} (\sigma) \quad (6.19a)$$

$$f_{\sigma_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad f_{\tau_{ij}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (i = 1,2,3) \quad (6.19b,c)$$

Oznakom $\text{div} (\sigma)$ predstavljena je divergencija tenzora koja daje vektor a komponente po kartezijevim x, y, z koordinatama glase:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \quad x \text{ smjer} \quad (6.20a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \quad y \text{ smjer} \quad (6.20b)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad z \text{ smjer} \quad (6.20c)$$

Prema jednadžbi 6.10 ukupna sila naprezanja (površinska sila) sastoji se od sile tlaka f_p i sile viskoznosti f_z . Sile naprezanja po komponentnim smjerovima ($i = 1,2,3$) koje su posljedica djelovanja tlaka f_{p_i} već su opisane jednadžbom 2.3b a sile naprezanja koje su posljedica viskoznosti $f_{z_i} = f_{\tau_{ij}}$ opisane su jednadžbom 6.19c.

Parcijalnim deriviranjem u jednadžbi 6.19c za slučaj nehomogene tekućine ($\rho \neq \text{konst.}$, $\eta \neq \text{konst.}$) dobiva se izraz:

$$f_{Zi} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right] \quad (i = 1,2,3) \quad (6.21a)$$

Bez uvida u detalje izvoda daje se i slijedeća jednadžba za definiciju sile viskoznosti f_Z (vektor):

$$f_Z = \frac{1}{\rho} \left[2 \operatorname{div}(\eta \operatorname{def} \mathbf{v}) - \frac{2}{3} \operatorname{grad}(\eta \operatorname{div} \mathbf{v}) \right] \quad (6.21a)$$

Pri analizi tečenja homogene tekućine ($\rho = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$) vrijedi prema jednadžbi kontinuiteta $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, a prema pravilima tenzorskog računa vrijedi jednakost $2 \operatorname{div}(\operatorname{def} \mathbf{v}) = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \Delta \mathbf{v}$ u kojoj oznaka Δ ima značenje Laplace-ovo operatora primijenjenog na vektor. U takvom slučaju sila viskoznosti f_Z izražena je jednakošću:

$$f_Z = -\nu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \nu \Delta \mathbf{v}, \quad f_{Zi} = \nu \Delta v_i = \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (6.22)$$

gdje je ν oznaka za kinematski koeficijent viskoznosti sa pripadnom jedinicom m^2/s . Kako je to i prije spomenuto sila viskoznosti nestaje samo ukoliko je $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ uz istovremeno zadovoljenje uvjeta $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (jednadžba kontinuiteta za nestišljivu tekućinu) a što je karakteristika idealne (bezviskozne) tekućine tretirane u Eulerovim dinamičkim jednadžbama.

Važno je i primijetiti da «nestajanje» sile viskoznosti f_Z ne znači nužno i nepostojanje viskoznih napreznja τ_{ij} koja su u općem slučaju uvijek prisutna (vidi jednadžbu 6.21). Samo ukoliko se pretpostavi $\eta = 0$, i napreznja uvjetovana viskoznošću i sila viskoznosti biti će jednake nuli.

6.3.4 Navier-Stokes-ova jednadžba za laminarno tečenje realne tekućine

Jednadžbe zakona očuvanja količine gibanja za laminarno tečenje dobivaju se upotrebom jednadžbe 6.10 sa uvrštavanjem odgovarajućih odnosa za ubrzanje prema jednadžbi 3.7a, za volumne sile prema jednadžbi 2.5a (u općem slučaju $f_B = -\operatorname{grad} u_B$), za sile tlaka prema jednadžbi 2.3 i za sile viskoznosti prema jednadžbi 6.21.

Za opći slučaj tečenja nehomogene tekućine ($\rho \neq \text{konst.}$, $\eta \neq \text{konst.}$) dobiva se Navier-Stokesova dinamička vektorska jednadžba 6.23a i 6.23b u indeksnoj notaciji:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } u_B - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{1}{\rho} \left[2 \text{div}(\eta \text{def } \mathbf{v}) - \frac{2}{3} \text{grad}(\eta \text{div } \mathbf{v}) \right] \quad (6.23a)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial u_B}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \right] (i = 1, 2, 3) \quad (6.23b)$$

pri čemu je za potpuni opis strujnog polja osim jednadžbe 6.23 potrebno zadovoljiti jednadžbu kontinuiteta, konstitutivne jednadžbe za dinamički koeficijent viskoznosti η i jednadžbe kojim je opisan odnos gustoće i tlaka/temperature $\rho = \rho(p, T)$.

Važno je uočiti da se gornja jednadžba razlikuje od Euler-ove dinamičke jednadžbe samo u dodatnom članu u kojem je sadržan utjecaj viskoznosti tekućine.

Za slučaj tečenja homogene tekućine ($\rho = \text{konst.}$, $\eta = \text{konst.}$) i djelovanje potencijala sile gravitacije ($u_B = gz$) jednadžba 6.23 prelazi u slijedeći oblik (6.24a-vektorski prikaz, 6.24b,c,d-po kartezijskim koordinatnim osima x, y, z):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = -\text{grad} \left(u_B + \frac{p}{\rho} \right) + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (6.24a)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \text{ } x \text{ smjer} \quad (6.24b)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \text{ } y \text{ smjer} \quad (6.24c)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \text{ } z \text{ smjer} \quad (6.24d)$$

Napominje se da Navier-Stokesove jednadžbe u sveopćoj formi nije matematički riješena iako postoje rješenja za najjednostavnije primjere tečenja. Rješavanje Navier-Stokesove jednadžbe u današnje vrijeme uobičajeno je rješavati numeričkim putem.

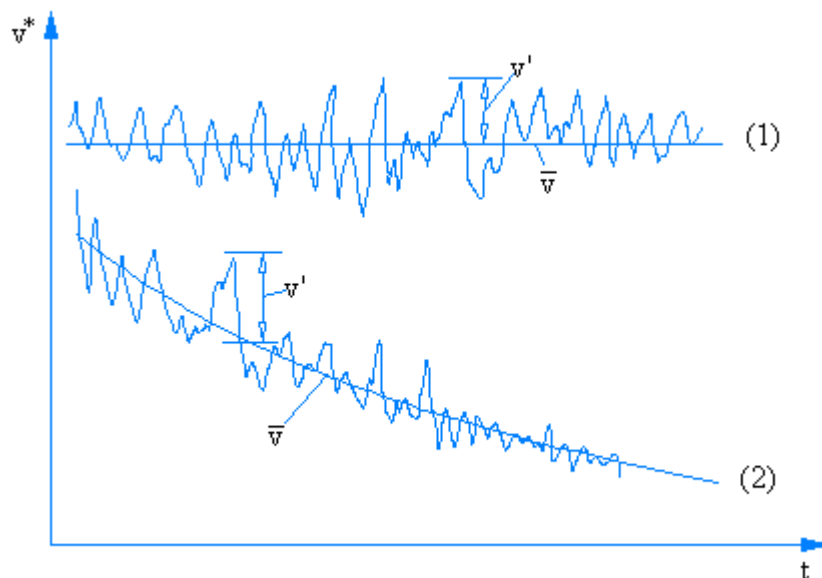
Navier-Stokes-ova jednadžba u osnovi vrijedi i za slučaj turbulentnog tečenja no obzirom na vrlo brze izmjene količine gibanja, koje se javljaju uslijed turbulencije, direktna primjena jednadžbe

6.24 postaje neprikladna za praćenje velikih brzina promjene količine gibanja ostvarenih u analiziranom turbulentnom toku.

6.3.5 Dinamička jednadžba za turbulentno tečenje realne tekućine (Reynolds)

Turbulentni režim tečenja pojavljuje se u najvećem broju problema vezanih uz tehničku praksu. U turbulentnom tečenju djelići tekućine ne gibaju se u međusobno nemiješajućim slojevima (laminama) već se pojavljuje vremenski i prostorno fluktuirajuće gibanja. Eksperimentalna istraživačka djelatnost potvrdila je činjenicu da cijele nakupine molekula ostvaruju fluktuirajuće gibanje a ne pojedinačne molekule, te da se stalno nove nakupine molekula različitih veličina «uključuju» u turbulentno gibanje dok s druge strane nekim nakupinama molekula fluktuacija zamire, ali se i nakon nekog vremena ponovno aktivira.

Na slici 6.6 dan je prikaz mjerenja brzina u fiksnoj točki cijevi kružnog proticajnog profila u kojoj se odvija tečenje pod tlakom. Sa 1 označen je slučaj statistički gledano stacionarnog turbulentnog tečenja pri također statistički gledano stacionarnom tlaku tokom vremena. Sa 2 označen je slučaj statistički gledano nestacionarnog turbulentnog tečenja pri također statistički gledano nestacionarnom tlaku.



Slika 6.6 - prikaz mjerenja brzina u fiksnoj točki cijevi kružnog proticajnog profila u kojoj se odvija turbulentno tečenje pod tlakom (1-statistički stacionarno tečenje pri statistički stacionarnom tlaku, 2-statistički nestacionarno turbulentno tečenje pri statistički nestacionarnom tlaku)

Obzirom da turbulentno tečenje u prostornoj domeni pri promjeni rubnih uvjeta ne odgovara trenutno na te promjene po rubovima prostorne domene, uobičajeno se govori o «pamćenju» turbulentnog tečenja.

Reynolds je prvi predložio pristup u kojem se stvarna odnosno trenutna vrijednost brzine ili tlaka prikazuje sa sumom statistički dobivene srednje vrijednosti promatranog polja (brzine, tlaka, temperature) i u vremenu varijabilne fluktuirajuće komponente promatranog polja.

Vektor trenutne brzine izražen sa trenutnim komponentama po smjerovima x, y, z dan je sa jednadžbom 6.25 a Reynolds-ovim osrednjavanjem dobiva se vremenski osrednjena komponenta i fluktuirajuća komponenta vektora brzine (jednadžba 6.26):

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (6.26)$$

Prema tome, komponente vektora brzine po smjerovima također se mogu prikazati zbrojem vremenski osrednjenog člana i fluktuirajućeg člana:

$$v_x = \bar{v}_x + v_x' \quad , \quad v_y = \bar{v}_y + v_y' \quad , \quad v_z = \bar{v}_z + v_z' \quad (6.27a,b,c)$$

Istim principom mogu se interpretirati i trenutne vrijednosti skalarnih polja temperature i tlaka.

$$T = \bar{T} + T' \quad , \quad p = \bar{p} + p' \quad (6.28a,b)$$

Također se može dokazati da je srednja vrijednost fluktuirajuće komponente promatranog polja u periodu osrednjavanja jednaka nuli ($E = \bar{E} + E' \rightarrow \bar{E}' = 0$).

Duljina perioda osrednjavanja ovisi o pojavi koja se analizira. Kao primjer može se spomenuti laboratorijsko mjerenje tlakova na krilima aviona. Mjerenje se provodi sa vrlo osjetljivim instrumentima sa kojim je moguće registriranje $> 10^6$ vrijednosti tlaka u jednoj sekundi a period osrednjavanja traje cca 5 minuta.

Ovakav pristup u opisu turbulencije je stohastičke prirode budući da se turbulentno tečenje promatra kao stohastički proces sa slučajnim varijablama E (trenutne vrijednosti nekog polja). U nastavku ovog poglavlja govoriti će se samo o slučaju turbulentnog tečenja homogene tekućine.

Jednadžba kontinuiteta za turbulentno tečenje homogene nestišljive tekućine nepromijenjeno je obzirom na dosadašnje navode i važeća je u istom obliku bez obzira da li se divergencija primjenjuje na trenutnu brzinu \mathbf{v} , osrednjenu komponentu $\bar{\mathbf{v}}$ i fluktuirajuću komponentu brzine \mathbf{v}' .

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (6.29)$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0 \rightarrow \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (6.30)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \rightarrow \frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0 \quad (6.31)$$

Reynolds-ova dinamička jednadžba izvedena je na način da se u Navier-Stokesovu jednadžbu umjesto trenutnih vrijednosti brzine i tlaka uvrste sume osrednjenih i fluktuirajućih komponenti, te se provodi nekoliko koraka algebarske manipulacije uz zanemarenje članova višeg reda. Detaljni izvod može se naći u velikom broju knjiga koje se bave mehanikom tekućina zbog čega se ovdje neće detaljno prikazati. Reynoldsova dinamička jednadžba za turbulentno tečenje realne homogene tekućine po komponentama x, y, z smjera glasi (6.32a,b,c):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \left(\frac{\partial \overline{v'_x v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_x v'_z}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} + \left(\frac{\partial \overline{v'_y v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_y v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_y v'_z}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \left(\frac{\partial \overline{v'_z v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'_z v'_z}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Usporedbom navedene Reynolds-ove jednadžbe i Navier-Stokesove jednadžbe može se uočiti da su one vrlo slične pa se Reynoldsova dinamička jednadžba može shvatiti i kao proširena Navier-Stokesova jednadžba u kojoj je izvršena zamjena trenutnih vrijednosti masenih sila u_{Bi} , tlaka p i brzina v_i sa članovima osrednjenih vrijednosti \bar{u}_{Bi} , \bar{p} i \bar{v}_i te su na lijevoj strani izraza dodani članovi koji predstavljaju učešće fluktuirajuće komponente u ukupnoj promjeni količine gibanja u vremenu.

Ukoliko se ti članovi prebace na desnu stranu gornjih jednadžbi, sa lijeve strane ostaje samo promjena količine osrednjenog gibanja u vremenu a na desnoj strani osim «stvarnih» osrednjenih

volumnih sila (npr. gravitacije) i površinskih sila (tlaka i viskoznosti) pojavljuje se i dodatna «negativna virtualna» sila povezana sa «virtuelnim» naperazanjima (vidi slijedeće jednadžbe 6.33a,b,c). Negativan predznak ukazuje na interesantnu činjenicu da se energija drenira iz osrednjenog gibanja odnosno toka, kako bi se proizvodila odnosno održala takva virtualna naprezanja.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{v_x' v_x'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x' v_y'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_x' v_z'}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{v_y' v_x'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_y' v_y'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_y' v_z'}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \overline{v_z' v_x'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_z' v_y'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v_z' v_z'}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Napominje se da ni Navier-Stokesovom ni Reynolds-ovom jednadžbom nisu uzeti u obzir utjecaji površinske napetosti no obzirom na većinu inženjerskih problema utjecaj sila površinske napetosti zanemariv je naspram ostalih doprinosa inercionoj sili.

Jedan od osnovnih izazova modelatora turbulencije je opis virtualnih naprezanja a većina današnjih numeričkih modela temelji se na pretpostavkama tzv. fenomenološkog pristupa opisu turbulencije. Pioniri istraživanja u području analize virtualnih naprezanja su Prandtl (1925) i Taylor (1953).

6.3.6 Fenomenološki opis turbulencije

Promatra se dvodimenzionalno tečenje u turbulentnom režimu sa profilom osrednjenih brzina prikazanih na slici 6.7. Prema Prandtl-u (1925) osrednjena virtuelna turbulentna naprezanja definirana se na slijedeći način:

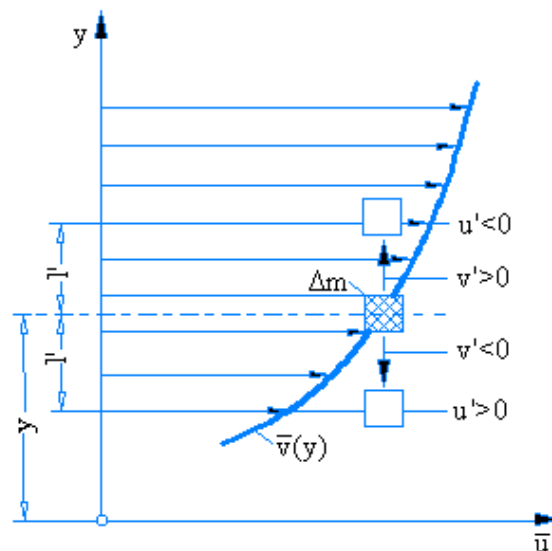
$$\overline{\tau_{xyT}} = -\rho \overline{v_x' v_y'} \quad (6.34)$$

U turbulentnom miješanju susjednih slojeva tekućine $m' = \rho v_y'$ odgovara masi tekućine koja u jednoj sekundi uslijed turbulentnog gibanja prođe kroz jediničnu horizontalnu površinu koja odjeljuje susjedne slojeve tekućine (vidi sliku 6.7). Ukoliko je u' fluktuirajuća komponenta brzine u longitudinalnom smjeru, jednadžba 6.34 opisuje turbulentna naprezanja pri pronosu longitudinalne komponente količine gibanja u transverzalnom smjeru. Prandtl također pretpostavlja «slične» vrijednosti fluktuirajućih komponenti brzina odnosno $v_y' = v_x'$. Ukoliko je transferzalni gradijent

osrednjenih brzina $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} > 0$ njihovi predznaci su suprotni a isti su ukoliko $\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} < 0$. Fluktuirajuća komponenta longitudinalne brzine je određena činjenicom da mol tekućine za vrijeme promjene položaja zadržava svoju inicijalnu brzinu u' dok njegov transferzalni pomak jenjava a nakon čega brzina promatranog djelića tekućine poprima vrijednost brzine u zatečenom sloju tekućine. Za kontinuiranu profil brzina, prema Prandtl-ovoj teoriji, transferzalna promjena položaja kvantificirana je sa $v_x' \approx l \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right|$ gdje je l Prandtl-ova duljina miješanja. Iz te definicije dobivaju se apsolutne vrijednosti fluktuacija brzine a kombinacijom sa jednadžbom (6.34) Prandtl-ova jednadžba za turbulentna naprezanja poprima oblik:

$$\overline{\tau_{xyT}} = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right| \cdot \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \quad (+ \text{ predznak za slučaj } \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} > 0) \quad (6.35)$$

Faktor proporcionalnosti između fluktuirajućih komponenti sadržan je u veličini duljine miješanja l koju je potrebno odrediti eksperimentalno. U svom prvom objavljenom radu (1925) Prandtl je pretpostavio konstantnost duljine miješanja l u promatranom toku.



Slika 6.7 – prikaz profila osrednjenih brzina u transferzalnoj ravnini i gibanje djelića tekućine iz sloja u sloj sa fluktuirajućom komponentom brzine ($v_x = u$, $v_y = v$, l -Prandtl-ova duljina miješanja)

U želji za poboljšanjem svoje teorije Prandtl je objavio i svoju «novu» teoriju u kojoj je generalnu formulaciju turbulentnih naprezanja $\overline{\tau_{xyT}} = -\rho \overline{v_x' v_y'}$ komparirao sa jednadžbom Boussinesq-a

odnosno analogno konstitutivnom Newton-ovom zakonu viskoznog trenja u laminarnom toku (vidi jednadžbu (1.4):

$$\overline{\tau_{xyT}} = \rho \nu_T \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \quad (6.36)$$

gdje je ν_T kinematski koeficijent *turbulentne* viskoznosti, a primjenom «stare» teorije turbulencije dobiva se jednakost:

$$\nu_T = l^2 \cdot \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} \quad (6.37)$$

Ukoliko bi se pretpostavila konstantna duljina miješanja l u transferzalnom smjeru gibanja, vrijednost kinematskog koeficijenta turbulentne viskoznosti ν_T nužno bi morao biti varijabilan u istom smjeru te bi morao poprimiti vrijednost 0 na mjestima kada se u profilu osrednjenih brzina

pojavljuje točka sa svojstvom $\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} = 0$. Primjerice u profilu osrednjenih brzina pri turbulentnom

tečenju homogene nestišljive tekućine kroz cijev kružnog poprečnog presjeka (slika 6.8) vrijednost

$\frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y} = 0$ postiže se upravo u osi cijevi a što bi značilo da je na tom položaju duljina miješanja

jednaka nuli. Budući da to nije istina a što je uvidio i sam Prandtl, u svojoj novoj teoriji uveo je pretpostavku da je koeficijent *turbulentne* viskoznosti ν_T konstantan u transverzalnom smjeru gibanja tekućine a ne duljina miješanja l .

Dugogodišnjom eksperimentalnom djelatnošću pokazalo se da za veliki raspon rubnih uvjeta u tokovima sa bliskim krutim granicama (tečenje u cijevima i tečenje po horizontalnoj ravnoj ploči) kao prva aproksimacija vrijedi jednakost $l = \chi y$ a u tokovima sa slobodnom turbulencijom (iza horizontalne ravne ploče, mlazovi, iza opstrujavane kugle ili valjka – vidi sliku 6.8) vrijedi jednakost $l = \beta b(x)$. Oznaka y predstavlja udaljenost od krute nepropusne granice a $b(x)$ karakterističnu duljinu promatranog toka u području slobodne turbulencije (promjer mlaza ili visina odnosno širina zone slobodne turbulencije iza opstrujavane kugle ili valjka). Vrijednosti konstanti χ, β odabiru se u ovisnosti o karakteristikama promatranog toka i rubnih uvjeta.

Korištenjem Prandtl-ove nove teorije i uvrštavanjem u Reynolds-ovu jednadžbu za nestlačivu tekućinu 6.33a,b,c za x, y, z smjer i usvajanjem pretpostavke o izotropnosti turbulencije ($\nu_{Tx} = \nu_{Ty} = \nu_{Tz}$) dobivaju se slijedeće jednadžbe (jednadžbe 6.38a,b,c):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Obzirom da je u većini turbulentnih tokova od primarnog inženjerskog interesa kinematski koeficijent turbulentne viskoznosti $\nu_T \gg$ koeficijent kinematske (molekularne) viskoznosti ν jednadžbe (6.38a,b,c) prelaze u «konačni» oblik :

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) \quad (6.39a)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_y}{\partial z^2} \right) \quad (6.39b)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{u}_B}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu_T \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial z^2} \right) \quad (6.39c)$$

Pretpostavka o izotropnosti turbulencije nije zadovoljena u nizu slučajeva tečenja. Jedan od primjera je gibanje morskih masa u kojima se uslijed izmjene topline sa atmosferom formira nejednoliki profil gustoće po vertikali (stratifikacija) a posljedica toga je i različita vrijednost kinematskog koeficijenta turbulentne viskoznosti u horizontalnom i vertikalnom smjeru ($\nu_{Tx} \approx \nu_{Ty} \neq \nu_{Tz}$).

7 Strujanje tekućina uzduž krutih granica

7.1 Uvod

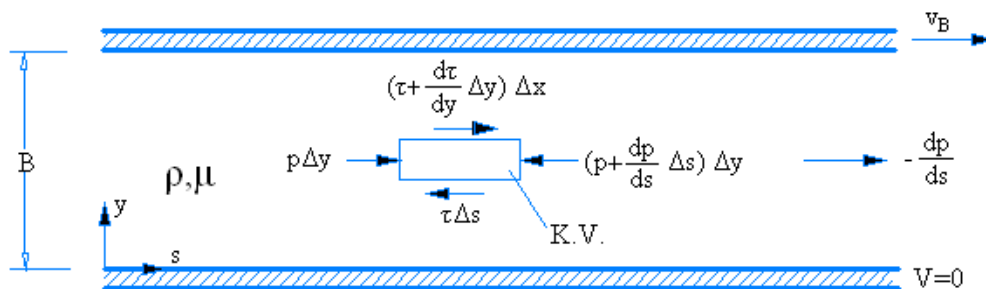
Strujanje realne tekućine oko krutog tijela ili uzduž njegovih krutih granica uzrokuje djelovanje sila na samo to tijelo a koje se nazivaju i otpori strujanju tekućine. Te sile otpora mogu se podijeliti na dvije komponente:

- *Otpori trenja* putem tangencijalnih naprezanja koja djeluju uzduž kontaktne površine tekućine i krutog tijela
- *Otpor oblika* putem normalnih naprezanja koja djeluju okomito na kontaktne površine

Kao važan i referentan primjer u ovom poglavlju analizirati će se slučaj otpora trenja uzduž ravne krute ploče te posljedična raspodjela brzina u njenoj blizini.

7.2 Jednoliko laminarno strujanje

Pri jednolikom strujanju sami uvjeti strujanja su neovisni odnosno nepromjenjivi uzduž smjera strujanja. Promatraju se dva slučaja strujanja. U prvom slučaju strujanje je generirano postavljanjem dvije međusobno beskonačno široke i paralelne ploče od kojih se jedna ploča pomiče konstantnom brzinom V_B a bez prisustva uzdužnog gradijenta tlaka $-dp/ds = 0$ (Couette-ovo strujanje). U drugom slučaju prisutan je uzdužni gradijent tlaka a obe ploče su u mirovanju (Poiseuille-ovo strujanje).



Slika 7.1 – generalizacija strujanja između dvije ravne ploče uzrokovano gibanjem jedne ploče brzinom V_B i gradijentom tlaka $-dp/ds$

7.2.1 Couette-ovo strujanje

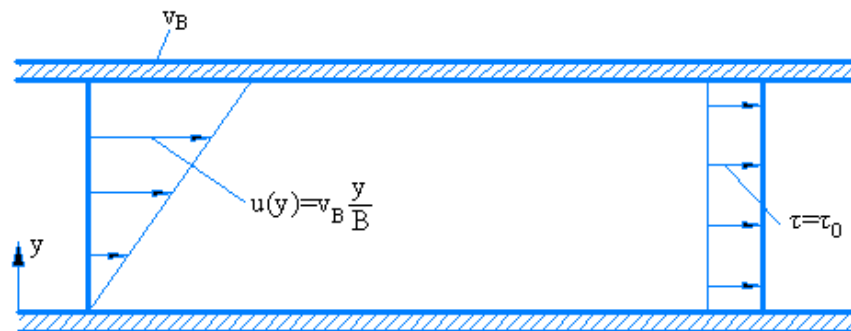
Rezultirajuća raspodjela tangencijalnih naprezanja i brzina moguće je dobiti temeljem Navier – Stokesove jednadžbe za jednoliko i stacionarno strujanje uz upotrebu odgovarajućih

pojednostavljenja ili primjenom zakona o očuvanju količine gibanja direktno na kontrolni volumen (vidi sliku 7.1).

$$-\frac{dp}{ds}\Delta s\Delta y + \frac{d\tau}{dy}\Delta y\Delta s = 0 \quad (7.1)$$

U slučaju odsustva gradijenta tlaka $-dp/ds = 0$ (Couette-ovo strujanje) dobiva se $d\tau/dy = 0$ odnosno jednoliki profil napreznja a što znači da se sila posmičnih napreznja između ploča prenosi u potpunosti. Za slučaj laminarnog strujanja Newton-ove tekućine posmična napreznja definirana su linearnim odnosom $\tau = \mu \frac{du}{dy} = \tau_0$, pa uz rubne uvjete na kontaktu gornje i donje ploče sa tekućinom $y = 0 \rightarrow u = 0$; $y = B \rightarrow u = V_B$ i nakon integracije dobiva se linearni profil brzina (7.2a) i veličina posmičnog napreznja (7.2b):

$$u = V_B \frac{y}{B} \quad ; \quad \tau_0 = \mu \frac{V_B}{B} \quad (7.2a,b)$$



Slika 7.2 – raspodjela brzina i posmičnog napreznja pri laminarnom Couette-ovom strujanju

Couette-ovo strujanje zadržava se u laminarnom režimu u području Reynolds-ovih brojeva manjih od $Re = (V_B B)/\nu < 1500$.

7.2.2 Ravninsko Poiseuille-ovo strujanje

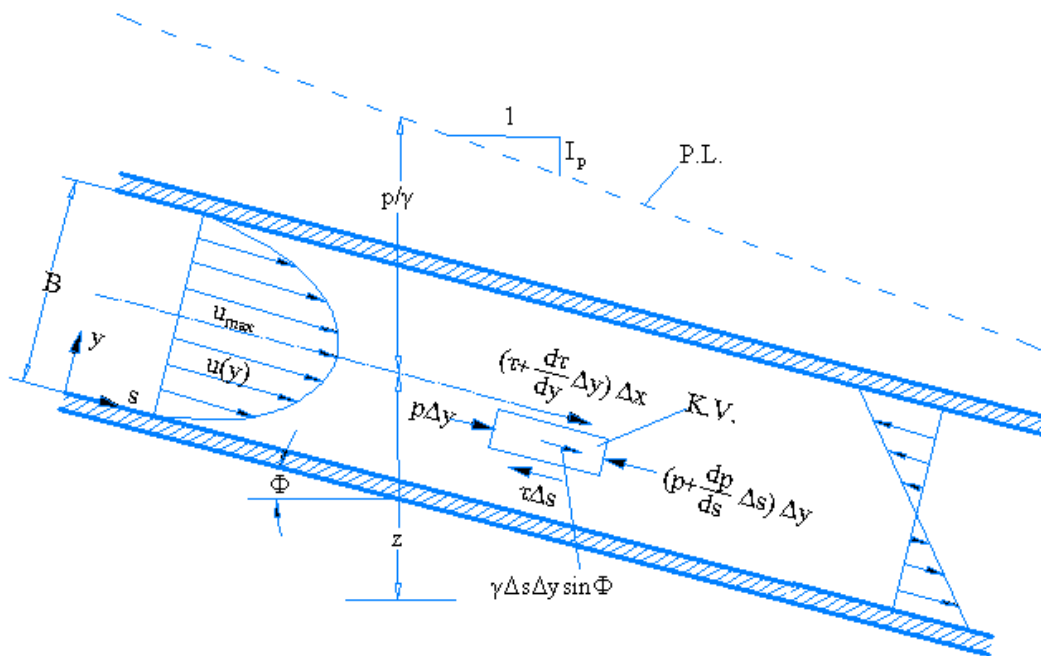
Kako je prikazano na slici 7.3 tečenje se odvija između dvije prostorno fiksirane ravne ploče koje su položene pod kutem θ u odnosu na horizontalu te uz gradijent tlaka $-dp/ds$. Primjenom zakona o očuvanju količine gibanja na označeni kontrolni volumen dobiva se jednadžba:

$$-\frac{dp}{ds} \Delta s \Delta y + \frac{d\tau}{dy} \Delta y \Delta s + \rho g \Delta s \Delta y \sin \theta = 0 \quad (7.3)$$

a iz geometrijskog odnosa $\sin \theta = -dz/ds$ slijedi jednakost

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{d}{ds} (p + \rho g z) \quad (7.4)$$

Desna strana jednadžbe 7.4 predstavlja gradijent piezometarske linije za koju će se u nastavku koristiti oznaka G_P a za koju također vrijedi jednakost $G_P = -\rho g I_P$ (slika 7.3).



Slika 7.3 – raspodjela brzina i posmičnog naprezanja pri laminarnom Poiseuille-ovom strujanju

Upotrebom Newton-ovog zakona $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ u jednadžbu 7.3 dobiva se izraz:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = G_P \quad (7.5)$$

Uz rubne uvjete na kontaktu gornje i donje ploče sa tekućinom $y = 0$; $y = B \rightarrow u = 0$ i nakon integracije dobiva se parabolični profil brzina:

$$u = \frac{-G_P}{2\mu} (By - y^2) \quad (7.6)$$

sa maksimalnim brzinama u osi ($y = B/2$) $u_{max} = -G_p B^2 / 8\mu$ i srednjom brzinom $V = 2/3 * u_{max}$. Raspodjela posmičnih napreznaja je linearna i definirana jednadžbom:

$$\tau = -G_p \left(\frac{B}{2} - y \right) \quad (7.7)$$

Iz koje se može uočiti da se maksimalna napreznaja pojavljuju na kontaktu proticajne tekućine i ploča. Poiseuille-ovo strujanje zadržava se u laminarnom režimu u području Reynolds-ovih brojeva manjih od $Re = (VB)/\nu < 1000$.

7.2.3 Laminarno strujanje sa slobodnim vodnim licem

Pri strujanju sa slobodnim vodnim licem piezometarska linija poklapa se slobodnom površinom a obzirom na jednolikost strujanja uzdužni gradijent tlaka je 0. Kontrolni volumen prikazan na slici 7.4 uronjen je do dubine $h-y$ pa se korištenjem zakona o očuvanju količine gibanja uz pretpostavku malog nagiba dna ($I_0 = \tan \theta \approx \sin \theta$) dobiva slijedeća jednakost:

$$\rho g \Delta s (h - y) \sin \theta - \tau \Delta s = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \rho g I_0 (h - y) \quad (7.8a,b)$$

odnosno raspodjela posmičnih napreznaja je linearna. Usvajanjem Newton-ovog zakona $\tau = \mu \frac{du}{dy}$

te rubnih uvjeta $y = 0 \rightarrow u = 0$ integracija jednadžbe 7.8b vodi do jednadžbe kojom je opisan parabolni profil brzina:

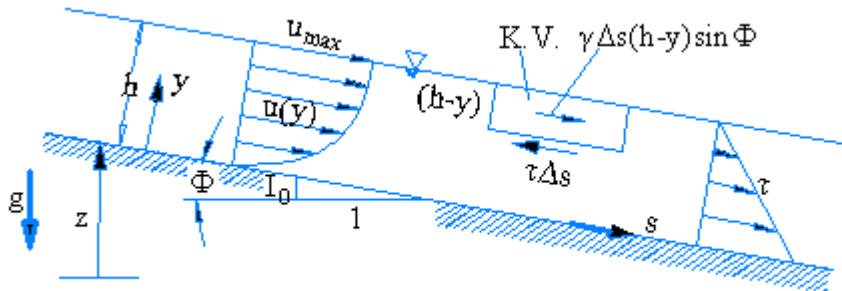
$$u = \frac{\rho g I_0}{2\mu} (2hy - y^2) \quad (7.9)$$

Lako je uočiti sličnost sa izrazom za profil brzina u Poiseuille-ovom laminarnom strujanju. Iz jednadžbe 7.9 razvidno je i to da se maksimalne brzine pojavljuju na slobodnoj površini te iznose:

$$u_{max} = \frac{\rho g I_0}{2\mu} h^2 \quad (7.10)$$

dok srednja brzina cijelog profila iznosi

$$V = \frac{\rho g I_0}{3\mu} h^2 = \frac{2}{3} u_{\max} \quad (7.11)$$



Slika 7.4 – raspodjela brzina i posmičnog napreznja pri laminarnom strujanju sa slobodnim vodnim licem

Ovakvo strujanje sa slobodnim vodnim licem zadržava se u laminarnom režimu u području Reynolds-ovih brojeva manjih od $Re = (VB)/\nu < 500$ a uobičajeni nastup ovakvog slučaja tečenja vezan je uz otjecanje sa urbanih površina nakon nastupa kiša (parkirališta, ceste itd).

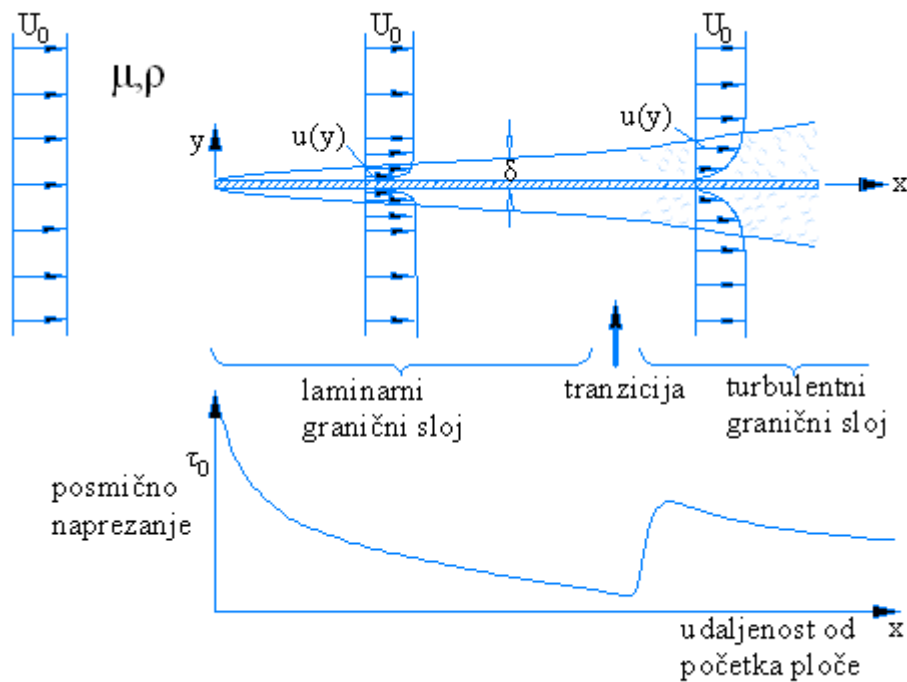
7.3 Strujanje u graničnom sloju

Strujanje u graničnom sloju je nejednoliko jer se razvija uzduž smjera strujanja a odnosi se na prostor između krute granice i slobodnog toka. Strujanje u području graničnog sloja obilježeno je upravo ponašanjem realne-viskozne tekućine dok se područje izvan graničnog sloja može shvatiti i kao bezviskozno odnosno strujanje idealne tekućine.

Na slici 7.5 prikazan je ravna i tanka ploče u mirovanju sa brzinom pristrujavanja U_0 . Zbog pojave ploče razvija se granični sloj između same ploče i područja u kojem je profil brzina još uvijek neporemećen. U području graničnog sloja brzina strujanja je u funkciji geometrijskog položaja odnosno vertikalne udaljenosti od krute ploče $u(y)$. Debljina graničnog sloja δ se povećava uzduž ploče a dogovorno se za ukupnu debljinu graničnog sloja usvaja vertikalna udaljenost od ploče do mjesta na kojem brzina strujanja postiže 99% od brzine slobodnog toka $u(\delta)=0,99U_0$.

Kao i u slučaju tečenja bilo koje realne tekućine i u graničnom sloju moguća je pojava laminarnog i turbulentnog strujanja. Na području početka ploče pojavljuje se laminarni granični sloj dok se u nastavku strujanja inicira nestabilnost i turbulencija. Područje u kojem se pojavljuje pretvorba laminarnog u turbulentno strujanje naziva se tranzicijsko područje. Na području laminarnog

strujanja posmična naprezanja se smanjuju uzduž toka sve do dionice tranzicije gdje se pojavljuje povećanje naprezanja a koje ponovno postepeno jenjava uzduž smjera strujanja (slika 7.5).



Slika 7.5 – prikaz razvoja graničnog sloja uzduž tanke ploče ($dp/dx = 0$)

Za karakterizaciju graničnog sloja definira se i lokalni Reynolds-ov broj temeljem lokalne debljine graničnog sloja $Re_\delta = U_0 \delta / \nu$ ili udaljenošću od početka ploče $Re_x = U_0 x / \nu$.

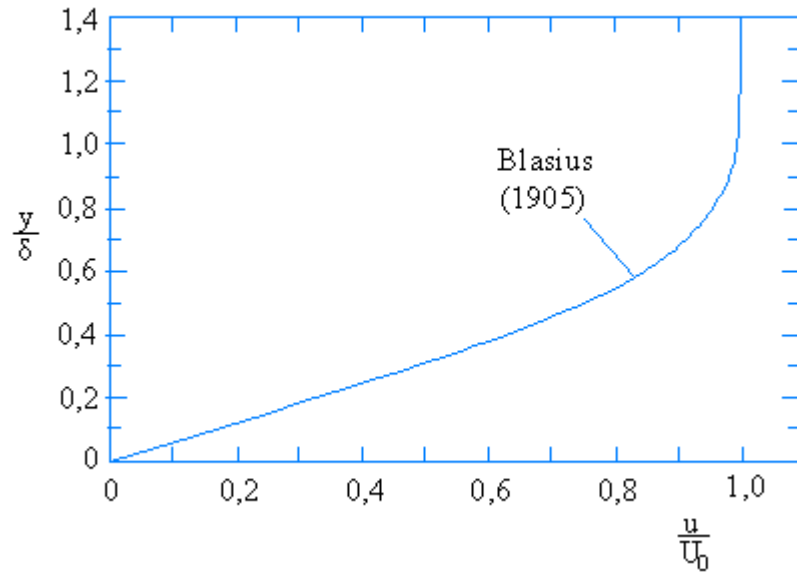
7.3.1 Laminarni granični sloj

Gradijent tlaka na području vanjskog toka je $dp/dx = 0$. Obzirom da je debljina graničnog sloja vrlo mala, tlak je u području graničnog sloja također konstantan. Temeljem usvojenih tvrdnji te uz pomoć dimenzionalne analize dobiva se i funkcionalni zakon prirasta debljine graničnog sloja uzduž ploče. Obzirom da debljina graničnog sloja ovisi o varijablama $\delta = (x, U_0, \mu, \rho)$, opažatelj koji bi putovao sa djelićem tekućine primijetio bi da je razvoj graničnog sloja samo funkcija vremena $t = x / U_0$ i kinematske viskoznosti $\nu = \mu / \rho$ pa se broj relevantnih varijabli može zapisati kao $\delta = (t, \nu)$. Iz razloga dimenzionalne homogenosti dobiva se slijedeća proporcionalnost:

$$\delta \sim \sqrt{\nu t} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \quad (7.12)$$

Proporcionalnost definirana prethodnim izrazom ukazuje na povećanje graničnog sloja sa korijenom udaljenosti od početka ploče. Definiranje konstante proporcionalnosti i profila brzina potrebuje daljnju i detaljniju analizu strujanja a kako je to prvi put napravio Blasius (1908). Rezultat njegove analize definiran je izrazom i prikazom u bezdimenzionalnoj formi kao na slici 7.6.

$$\delta = 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \quad (7.13)$$



Slika 7.6 – bezdimenzionalni profil brzina u laminarnom graničnom sloju

Posmično naprežanje na kontaktu sa krutom pločom je definirano direktno iz gradijenta brzina:

$$\tau_0 = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = 0,332 \mu \frac{U_0}{x} \text{Re}_x^{1/2} \quad (7.14)$$

Pri čemu je konstanta 0,332 izvedena direktno iz bezdimenzionalnog profila brzina prikazanog na slici 7.6. Kako se iz izraza 7.14 može uočiti, naprežanje se smanjuje sa povećanjem udaljenosti od početka ploče $\tau \sim x^{-1/2}$ odnosno inverzno od povećanja debljine graničnog sloja. Ukupna sila trenja na duljini L i širini B ploče dobiva se integracijom lokalnih posmičnih naprežanja:

$$F_s = \int_0^L \tau_0 B dx \quad (7.15)$$

Upotrebom jednadžbe 7.14 u jednadžbu 7.15 te integracijom dobiva se izraz:

$$F_s = 0,664\mu U_0 \operatorname{Re}_L^{1/2} \quad (7.16)$$

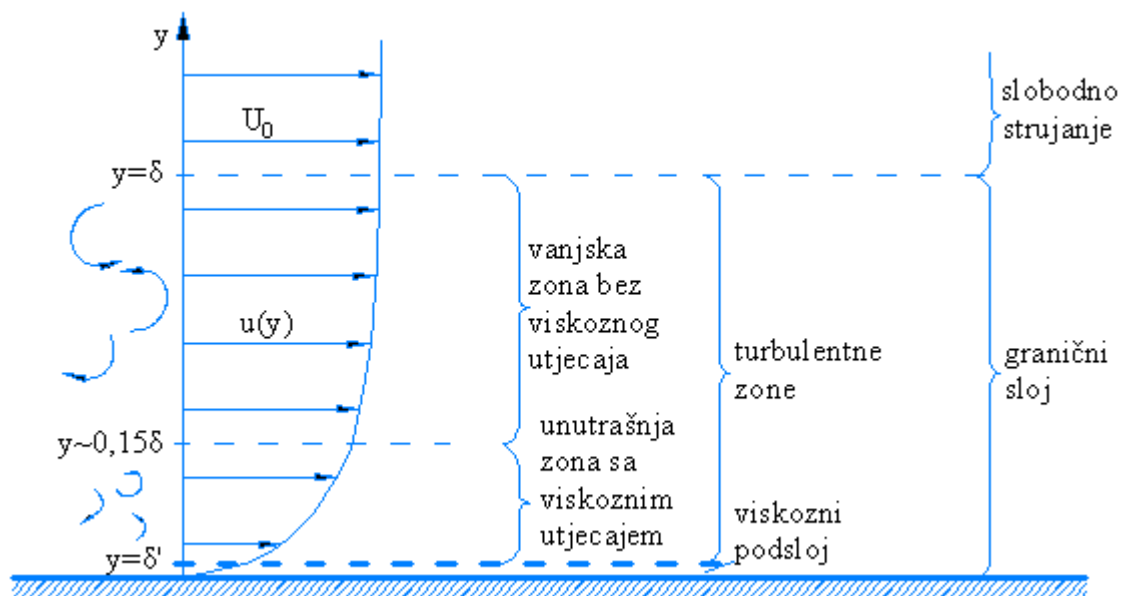
Pri čemu se oznaka $\operatorname{Re}_L = U_0 L / \nu$ odnosi na Reynolds-ov broj za ploču kojim je opisan efekt ukupne duljine ploče L . Uobičajena je praksa da se sila površinskog trenja definira bezdimenzionalno putem koeficijenta trenja C_f .

$$C_f = \frac{F_s}{\frac{\rho U_0^2}{2} BL} = \frac{1,33}{\operatorname{Re}_L^{1/2}} \quad (7.17)$$

Navedeni izraz važeći su samo u zoni laminarnog graničnog sloja odnosno do zone tranzicije koja nastupa pri vrijednostima $\operatorname{Re}_x = 500\,000$, što je dobiveno temeljem eksperimentalnog istraživanja.

7.3.2 Turbulentni granični sloj

Turbulentni granični sloj nakon tranzicije ima bitno složeniju strukturu od laminarnog graničnog sloja (slika 7.7). Veći dio graničnog sloja sačinjen je od turbulentne zone sa vrtlozima i fluktuirajućim vrijednostima koje karakteriziraju strujanje. U zoni vrlo bliskoj zidu te fluktuacije su prigušene tako da se i u ovom slučaju pojavljuje jedan viskozni podsloj u kojem nastupaju laminarni uvjeti strujanja.



Slika 7.7 – Turbulentni granični sloj na glatkoj ploči sa vremenski osrednjenim profilom brzina i naprezanja

Turbulentni granični sloj razvija se uzduž toka zbog čega se mijenjaju i uvjeti brzina i posmičnih napreznja. Brzina promjene je doduše toliko mala da se lokalno mogu usvojiti lokalni uvjeti brzina, pri čemu se lokalno posmično napreznje u cijelom graničnom sloju impulsno prenosi između krute stjenke i zone slobodnog toka. Drugim riječima, to znači da se u najvećem dijelu graničnog sloja pojavljuje konstantno posmično napreznje τ_0 . Tek u području graničnog sloja bliskog slobodnom toku dolazi do naglijeg pada posmičnih napreznja prema vrijednosti 0. Upravo iz ovakvog razmatranja smisaono je i definiranje pojma „brzinskog napreznja“ kojeg se izražava slijedećom jednakošću:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (7.18)$$

U blizini krute stjenke (zida) viskoznost ima značajniji utjecaj zbog čega se uvodi pojam „viskozne duljine“:

$$l_v = \frac{\nu}{u_*} \quad (7.19)$$

Na području viskoznog podsloja odvija se čisto laminarno strujanje za koji i vrijedi Newtonov zakon:

$$\mu \frac{du}{dy} = \tau_0 = konst. \quad (7.20)$$

Te se upotrebom rubnih uvjeta $y = 0 \rightarrow u = 0$ dobiva jednakost

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y \quad (7.21)$$

odnosno linearni profil brzina kojeg se upotrebom navedenih pojmova brzinskog napreznja i viskozne duljine može prikazati i u bezdimenzionalnoj formi:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{y}{l_v} \quad (7.22)$$

Ovakav linearni profil brzina prihvatljiva je aproksimacija do udaljenosti $y = \delta = 5,0 l_v$ (vidi sliku 7.9).

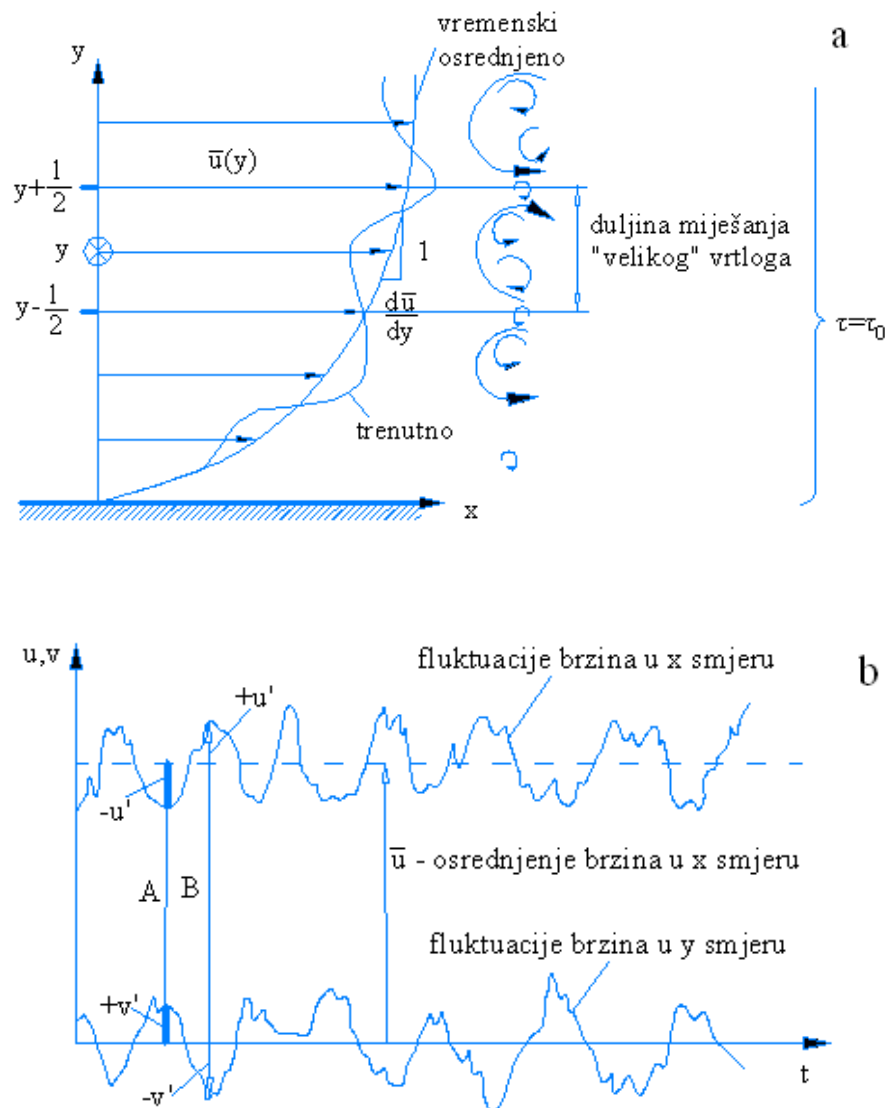
Na *turbulentnom* području graničnog sloja izmjena količine gibanja se ostvaruje uglavnom kroz djelovanje vrtloga. To djelovanje ima izrazito nestacionaran karakter zbog kojeg se pojavljuju i stalne promjene (fluktuacije) u trenutnim profilima brzina (slika 7.8a). Ukoliko se tijekom nekog perioda osmatranja na svakoj pojedinoj udaljenosti y odrede vremenski osrednjene komponente brzina \bar{u}, \bar{v} u x (horizontalnom) i y (vertikalnom) smjeru (slika 7.8b) dobivaju se i vremenski osrednjeni profili komponenti brzina $\bar{u} = f(y)$ i $\bar{v} = 0$ (slika 7.8a). Trenutna brzina izmjene količine gibanja je $-\rho u'v'$ a vremenski osrednjena vrijednost odgovara posmičnom naprezanju $\tau_0 = -\rho \overline{u'v'}$. Vrijednost člana $\overline{u'v'}$ različita je od nule obzirom da postoji korelacija između obe vrijednosti komponenti fluktuacije, kako se to može i uočiti sa slike 7.8b (slučaj A $\rightarrow u' < 0$ i $v' > 0$ i slučaj B $\rightarrow u' > 0$ i $v' < 0$). Dobro je primijetiti i to da definicijski izraz za brzinsko naprezanje (jednadžba 7.17) također daje i informaciju o redu veličine turbulentnih fluktuacija $u' \sim u_*$ i $v' \sim u_*$. Prema modelu „duljine miješanja“ (Prandtl, 1925 ; detaljnija razrada i izvodi vezani uz ovaj pristup u opisu turbulenije dani su u prethodnom poglavlju) posmično naprezanje je definirano izrazom:

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad (7.23)$$

U kojem se simbol „ l “ odnosi na „duljinu miješanja“ u izmjeni količine gibanja. Integracijom jednadžbe 7.23 dobiva se *logaritamski zakon raspodjele brzina pri turbulentnom strujanju uz krutu granicu*:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C \quad (7.24)$$

u kojem je $\kappa \approx 0,4$ tzv. Karman-ova konstanta dobivena temeljem eksperimentalnog istraživanja provedenih na mnogobrojnim karakterističnim tipovima strujanja. C predstavlja konstantu integracije te je u funkciji rubnih uvjeta. U nastavku se analiziraju vrijednosti konstante C za dva karakteristična područja unutar turbulentne zone graničnog sloja: unutarnja turbulentna zona zidne i vanjska turbulentna zona.



Slika 7.8 – struktura vrtloga, trenutni i osrednjeni profil brzina (a), vremenska dinamika trenutnih brzina u funkciji vremena i vertikalne udaljenosti od krute granice (b)

Unutarnja turbulentna zona na donjnjem rubu graniči sa viskoznom podslojem pa se utjecaj viskoznosti u prenosi kroz rubne uvjete. Prelaz iz linearnog zakona viskoznog podsloja (jednadžba 7.22) i logaritamskog zakona (jednadžba 7.24) profila brzina dešava se na vertikalnoj udaljenosti $\delta' = 11,8l_v$ (eksperimentalno dokazana vrijednost). Na toj udaljenosti brzina je izražena kao $\bar{u} = \overline{u_{\delta'}}$ a upotrebom obe jednadžbe 7.22 i 7.24 definirani su i izrazi:

$$\frac{\overline{u_{\delta'}}}{u_*} = \frac{\delta'}{l_v} \quad \frac{\overline{u_{\delta'}}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \delta' + C \quad (7.25a,b)$$

koji daju konstantu integracije

$$C = 11,9 - \frac{1}{\kappa} \ln(11,8 l_v) \quad (7.26)$$

Usvajanjem ovakve konstante u logaritamski zakon raspodjele brzina dobiva se slijedeća jednadžba:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2,5 \ln \frac{y}{l_v} + 5,5 \quad (7.27)$$

Eksperimentalna istraživanja potvrdila su opravdanost primjene ovako definiranog logaritamskog zakona raspodjele brzina na području $30 < y / l_v < 500$. Prelaz iz linearnog zakona važećeg za viskozni podsloj u logaritamski zakon definiran jednadžbom 7.27 odvija se u prelaznom području koje se nalazi u rasponu vertikalnih udaljenosti od krute granice $5 < y / l_v < 30$.

U *vanjskoj turbulentnoj zoni* viskoznost praktički ne utječe na raspodjelu brzina. Prelazak iz vanjske turbulentne zone u zonu slobodnog toka označen je rubnim uvjetom $y = \delta \rightarrow u = U_0$ pa se njegovom primjenom u jednadžbi 7.24 dobiva konstanta integracije C te jednadžba profila brzina važeća za područje vanjske turbulentne zone:

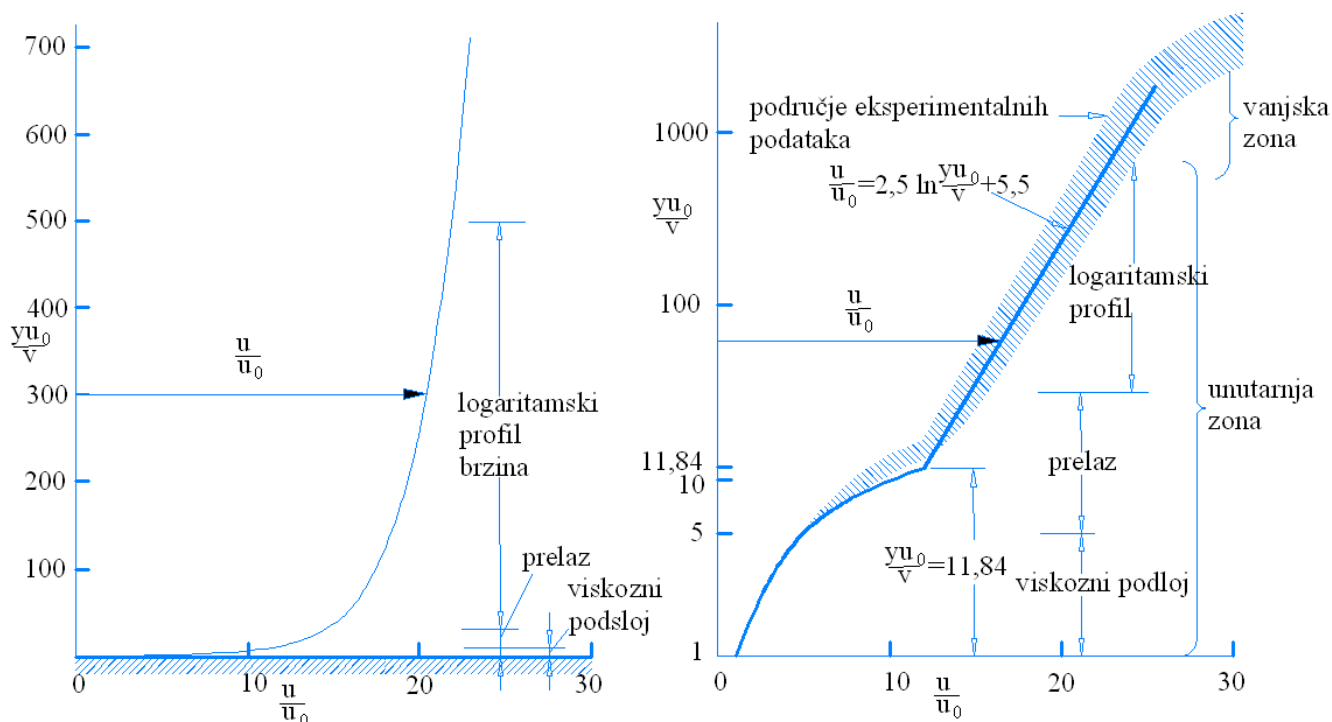
$$\frac{U_0 - \bar{u}}{u_*} = -2,5 \ln \frac{y}{\delta} \quad (7.28)$$

Područje primjene ovog zakona ograničeno je s „doljnje“ strane prelaskom u *unutarnju turbulentnu zonu* ($y/l_v \approx 500$) a s „gornje“ strane samim rubom turbulentnog graničnog sloja ($y/\delta \leq 1$). Prema tome cca 85% graničnog sloja sadržano je u *vanjskoj turbulentnoj zoni*. Detaljno eksperimentalno istraživanje pokazalo je da na području samog ruba graničnog sloja ($y/\delta=1$) ipak nastupa otklon od čistog logaritamskog zakona definiranog jednadžbom 7.28. Taj otklon je posljedica neturbulentnog-bezvrtložnog strujanja „iznad“ turbulentnog graničnog sloja (zona slobodnog toka $y/\delta > 1$) te dolazi do prigušene izmjene djelića tekućine između turbulentnog graničnog sloja i slobodnog toka. Prema rezultatima eksperimentalnih istraživanja (Coles, 1956) usvojeno je i proširenje jednadžbe 7.28 na jednadžbu 7.29 a čime je postignuto i bolje slaganje sa eksperimentalnim podacima.

$$\frac{U_0 - \bar{u}}{u_*} = -2,5 \ln \frac{y}{\delta} + \frac{1,1}{\kappa} \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2\delta} \right) \quad (7.29)$$

Za praktičnu upotrebu često se koristi i jednostavniji obrazac (jednadžba 7.30) temeljem kojeg se definira profil brzina na području $10^5 < Re_\delta < 10^7$:

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \quad (7.30)$$



Slika 7.9 – prikaz profila brzina u turbulentnom graničnom sloju (lijevo – linearna skala ; desno – logaritamska skala)

Primjenom zakona očuvanja količine gibanja i jednadžbe kontinuiteta na kontrolni volumen prikazan na slici 7.10 u slučaju stacionarnog strujanja uzduž glatke ravne ploče te uz upotrebu profila brzina prema jednadžbi 7.30 dobiva se i vrijednost posmičnog napreznja u profilu graničnog sloja:

$$\tau_0 = 0,0225 \rho U_0^2 \left(\frac{\nu}{U_0 \delta}\right)^{1/4} \quad (7.31)$$

Upotrebom integracije s rubnim uvjetima $x = 0 \rightarrow \delta = 0$, te uz zanemarenje početne dionice na kojoj se pojavljuje viskozni granični sloj, dobiva se i jednadžba prirasta debljine graničnog sloja uzduž glatke ploče:

$$\delta = \frac{0,37 x^{4/5} \nu^{1/5}}{U_0^{1/5}} = \frac{0,37 x}{Re_x^{1/5}} \quad (7.32)$$

Kako se iz jednadžbe 7.32 može uočiti, rast debljine turbulentnog graničnog sloja uzduž glatke ploče ($\delta \sim x^{4/5}$) intenzivniji je od rasta debljine laminarnog graničnog sloja.

Uvođenjem jednadžbe 7.32 u jednadžbu 7.31 dobiva se:

$$\tau_0 = \frac{\rho U_0^2}{2} \frac{0,058}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (7.33)$$

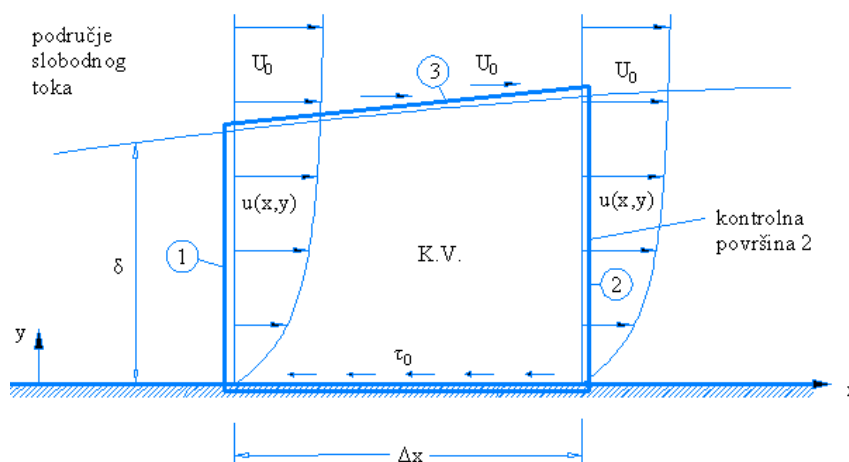
a primjenom izraza 7.33 u jednadžbu 7.15 definirana je i rezultirajuća posmična sila (sila trenja) uzduž ploče duljine L i širine B :

$$F_s = \frac{\rho U_0^2}{2} \frac{0,074}{\text{Re}_L^{1/5}} BL \quad (7.34)$$

odnosno bezdimenzionalni koeficijent trenja C_f .

$$C_f = \frac{0,074}{\text{Re}_L^{1/5}} \quad (7.35)$$

Obzirom da je jednadžba 7.31 dobivena uz usvajanje profila brzina prema jednadžbi 7.30 na koju je postavljeno ograničenje područja prihvatljive primjene ($10^5 < \text{Re}_\delta < 10^7$) izrazi kojima su opisani δ , τ_0 i C_f (jednadžbe 7.32, 7.33 i 7.35) također su limitirani na područje primjene prema Reynoldsovom broju Re_L odnosno $\text{Re}_x < 10^7$.



Slika 7.10 – kontrolni volumen na kojem se provodi zakon očuvanja količine gibanja (kontrolni volumen je ograničen kontrolnim površinama 1,2,3)

8 Strujanje u cjevovodima pod tlakom

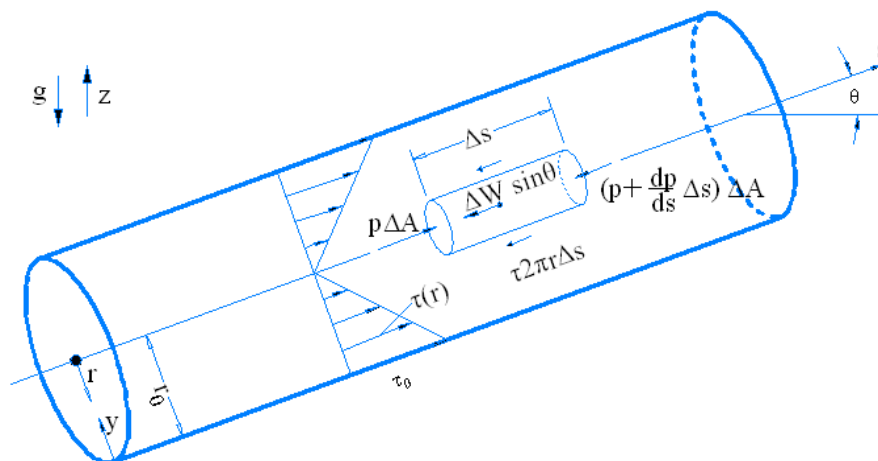
8.1 Uvod

Strujanje u cjevovodima pod tlakom je od velikog tehničkog značenja u transportu tekućina poput vode, nafte ili komercijalnih plinova za potrebe opskrbe ili energetskog iskorištavanja (grijanja, hlađenja, pokretanje turbina). Realna tekućina koja struji kroz cjevovode pod tlakom nailazi na otpore trenja uzduž kontaktne površine sa stjenkom.

U ovom poglavlju težište je dano na analizu stacionarnog tečenja u cijevima kružnog poprečnog presjeka u kojima proticajna tekućina ispunjava cijeli unutrašnji prostor cijevi te se nalazi pod tlakom.

8.2 Raspodjela posmičnih napreznja

Raspodjela posmičnih napreznja je neovisna o internom načinu tečenja, laminarnom ili turbulentnom. Za izvođenje raspodjele posmičnog napreznja koristi se jedan lokalni cilindrični kontrolni volumen duljine Δs i radijusa r koji se nalazi pod kutem θ u odnosu na horizontalu ($\sin\theta = dz/ds$) kako je to prikazano na slici 8.1.



Slika 8.1 – raspodjela posmičnih napreznja i cilindrični kontrolni volumen u cijevi kružnog poprečnog presjeka pri stacionarnom i jednolikom tečenju

U slučaju stacionarno i jednolikog tečenja prikazanog na slici 8.1 zadovoljen je uvjet ravnoteže sila u s smjeru između sila tlaka, težine i posmika po plaštu cilindra:

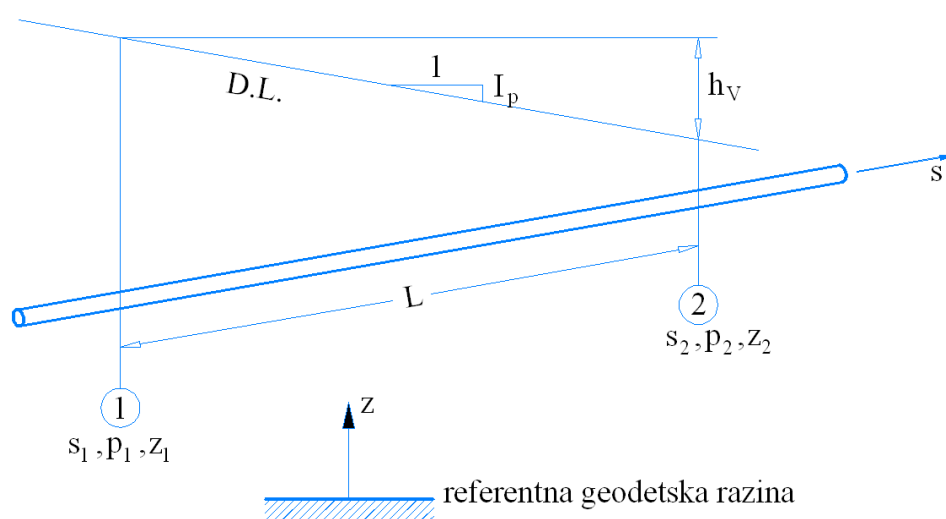
$$\frac{dp}{ds} \Delta s \Delta A - \rho g \Delta A \Delta s \frac{dz}{ds} - \tau (2\pi r) \Delta s = 0 \quad (8.1)$$

Pri čemu je $\Delta A = r^2 \pi$ pa se može pisati i slijedeća jednakost:

$$\tau = \frac{r}{2} \left[-\frac{d}{ds} (p + \rho g z) \right] = \frac{r}{2} (-G_p) \quad (8.2)$$

Dio izraza 8.2 koji se nalazi u uglatim zagrada predstavlja gradijent piezometarskog tlaka pa je u drugom dijelu izraza upotrijebljena zamjenska oznaka G_p . Iz izraza se lagano može uočiti da je raspodjela pomičnog naprezanja uzduž r uvijek linearna i nije ovisna o uvjetima tečenja. Maksimalna vrijednost postiže se na mjestu kontakta cijevi i proticajne tekućine $\tau_0 = (-G_p r_0) / 2$. Gradijent piezometarske linije I_p uzduž dionice cjevovoda jednolikog poprečnog presjeka L konstantan je i iznosi:

$$\frac{h_v}{L} = -\frac{G_p}{\rho g} = I_p \quad (8.3)$$



Slika 8.2 – gubitak mehaničke energije h_v uzduž duljine L pri jednolikom tečenju u cijevi pod tlakom

Obzirom da su u slučaju jednolikog tečenja energetska i piezometarska linija na konstantnoj međusobnoj udaljenosti pad piezometarske linije h_v uzduž duljine L identičan je padu energetske linije. Temeljem jednadžbi 8.2 i 8.3 dobiva se i funkcijski odnos između gubitka mehaničke energije posmičnih naprezanja uz stjenku cijevi kružnog poprečnog presjeka ($D = 2r_0$) na dužini cijevi L .

$$h_v = 4 \frac{L}{D} \frac{\tau_0}{\rho g} \quad (8.4)$$

Raspodjela brzina koja se pojavljuje kao posljedica djelovanja posmičnih naprezanja u ovisnosti je o uvjetima izmjene količine gibanja koji su različiti za slučajeve laminarnog i turbulentnog tečenja.

8.3 Laminarno tečenje (Poiseuille-ovo tečenje)

Primjena Newton-ovog zakona u koordinati $y = r - r_0$ daje jednakost:

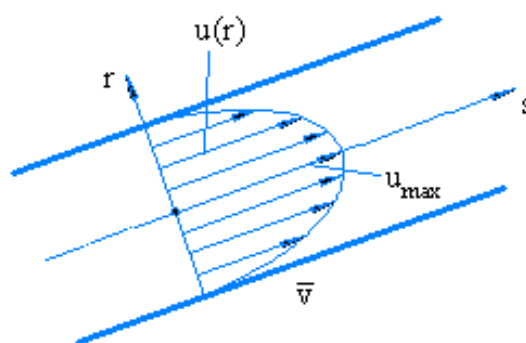
$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr} \quad (8.5)$$

te primjenom jednadžbe 8.2 slijedi:

$$\frac{du}{dr} = \frac{G_p}{2\mu} r \quad (8.6)$$

a integracijom uz rubne uvjete $r = r_0 \rightarrow u = 0$ dobiva se zakon raspodjele brzina u radijalnom smjeru za cijev kružnog poprečnog presjeka pri jednolikom tečenju (parabola):

$$u = \frac{-G_p}{4\mu} (r_0^2 - r^2) \quad (8.7)$$



Slika 8.3 – parabolična raspodjela brzina u cijevi kružnog poprečnog presjeka pri laminarnom režimu strujanja

Maksimalna vrijednost brzina pojavljuje se upravo u osi cijevi i iznosi:

$$u_{\max} = \frac{-G_P}{4\mu} r_0^2 \quad (8.8)$$

Ukupni protok kroz poprečni presjek cijevi dobiva se integracijom po površini poprečnog presjeka:

$$Q = (-G_P) \frac{\pi r_0^4}{8\mu} \quad (8.9)$$

sa srednjom vrijednosti brzina \bar{V} u poprečnom presjeku:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{-G_P}{8\mu} r_0^2 = \frac{1}{2} u_{\max} \quad (8.10)$$

Ukoliko se promatra laminarno tečenje uzduž cijevi duljine L sa promjerom D upotrebom jednadžbe 8.10 i 8.3 dobiva se i tzv Hagen-Poiseuille jednadžba:

$$h_v = \frac{32\mu L\bar{V}}{\pi D^4} \quad (8.11)$$

iz koje se može uočiti da je gubitak mehaničke energije a koji ujedno odgovara i padu tlaka linearno proporcionalan srednjoj brzini strujanja u presjeku. Praktični primjeri ovakvog tečenja su vezani uglavnom uz tanke cijevi koje se koriste u kemijskim aparaturnama ili se pojavljuju u biološkim sustavima poput biljnih i životinjskih kapilara.

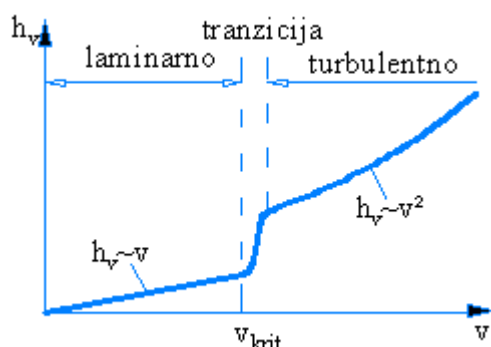
8.4 Tranzicija iz laminarnog u turbulentno tečenje

Prelaz iz laminarnog u turbulentno tečenje je određeno Reynolds-ovim brojem ($Re = \frac{\bar{V}D}{\nu} \approx 2000$).

Činjenica je da se vrijednost kritičnog Reynolds-ovog broja pri kojem nastupa prelaz iz laminarnog u turbulentno tečenje ovisi i o samim uvjetima u kojima se odvija eksperiment. Primjerice ukoliko se eksperiment provodi u cijevima vrlo male hrapavosti i uz odsustvo bilo kakvih vibracija te ukoliko se brzine relativno naglo povećaju, moguće je postignuti čak i $Re \approx 40\,000$ a da još uvijek nema nastupa turbulencije. S druge strane ukoliko se eksperiment provodi na način da se na početku stvore uvjeti turbulentnog tečenja, te se brzine postepeno smanjuju, laminarizacija strujanja neće nastupiti prije nego što se postigne $Re \approx 2000$. Obzirom da je za vrijednosti $Re < 2000$ strujanje

definitivno laminarno, u tehničkoj praksi se za karakterističnu vrijednost nastupa tranzicije najčešće koristi upravo $Re = 2000$.

Različito u gubicima mehaničke energije odnosno tlaka uzduž duljine cijevi L pri različitim uvjetima tečenja (laminarno, tranzicijsko, turbulentno) može se uočiti i sa slike 8.4. na području laminarnog tečenja odnos srednje brzine i gubitaka je laminaran dok nakon tranzicije odnos je takav da su gubici proporcionalni kvadratu srednjih brzina zbog pojačanih posmičnih naprezanja uzrokovanih pojavom turbulentnih vrtloga.



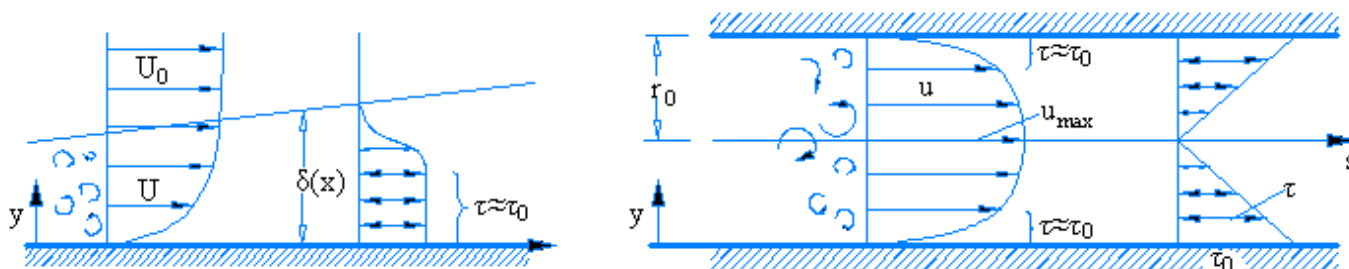
Slika 8.4 – prikaz gubitaka mehaničke energije (tlačne energije) u funkciji srednjih brzina kroz cijevi kružnog poprečnog presjeka

8.5 Turbulentno tečenje

Univerzalnost primjene logaritamskog zakona raspodjele brzina u svim strujanjima sa zidnom turbulencijom u kojima kruta stjenka zida „proizvodi“ turbulenciju naznačena je u prethodnom poglavlju o turbulentnom graničnom sloju. Na slici 8.5 prikazana je shematizacija sličnosti između turbulentnog strujanja u području graničnog sloja iznad ravne ploče i strujanja u cijevi sa kružnim poprečnim presjekom. Iako je strujanje u graničnom sloju nejednoliko odnosno vezano na uzdužnu koordinatu $\delta = f(x)$, smislaono je usvajanje pretpostavke o lokalnoj ravnoteži sa konstantnom izmjenom količine gibanja $\tau = \tau_0$ u području bliskom zidu. Nasuprot tome u slučaju strujanja kroz cijev kružnog poprečnog presjeka profil posmičnih naprezanja je linearan i osno simetričan. Ipak i u ovom slučaju na malim udaljenostima y od konture cijevi, na kojima je utjecaj proizvodnje turbulencije najintenzivniji, može se usvojiti pretpostavka konstantnih posmičnih naprezanja $\tau = \tau_0 = \text{konst.}$ koja su neovisna i o efektu zakrivljenosti konture cijevi.

U nastavku će se koristiti predložena analogija za potrebe definiranja raspodjele brzina i otpora trenja za slučajeve glatkih i hrapavih cijevi kružnog poprečnog presjeka. Veličina koja će u

nastavku imati veliku važnost je brzinsko naprežanje $u_* = \sqrt{\tau_0 / \rho}$ definirano već u prethodnim poglavljima.



Slika 8.5 – shematska usporedba između turbulentnog strujanja u graničnom sloju i cijevi kružnog poprečnog presjeka

8.5.1 Raspodjela brzina

U ovom poglavlju za vremenski osrednjene brzine u uzdužnom smjeru cijevi koristiti će se oznaka u umjesto oznake \bar{u} .

U glatkoj cijevi i uz samu stjenku turbulencija je prigušena pa se govori o viskoznom podsloju tako da u analogiji prema strujanju u graničnom sloju vrijedi:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{y}{l_v} \quad (8.12)$$

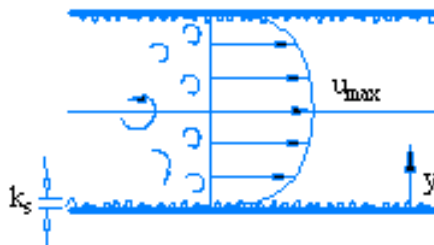
i to za područje $0 < y/l_v < 5$. Na udaljenostima u rasponu $20 < y/l_v < 100\ 000$ također prema analogiji sa graničnim slojem (unutarnja turbulentna zona) primjenjiv je izraz:

$$\frac{u}{u_*} = 2,5 \ln \frac{y}{l_v} + 5,5 \quad (8.13)$$

Na centralnom području poprečnog presjeka cijevi (vanjska turbulentna zona) $y/r_0 > 0,15$ primjenjuje se logaritamski zakon raspodjele brzina uz odgovarajuće rubne uvjete u osi cijevi $y = r_0 \rightarrow u = u_{max}$:

$$\frac{u_{max} - u}{u_*} = -2,5 \ln \frac{y}{r_0} \quad (8.14)$$

Hrapava cijev je u realnim i praktičnim uvjetima prisutnija od glatke cijevi a hrapavost u tehničkom smislu može biti posljedica samog načina proizvodnje (betonske cijevi hrapavije od staklenih) ili eksploatacije (korozija ili inkrustacija). Apsolutna hrapavost k_s je tehnička mjera tih proizvodnih i eksploatacijskih nepravilnosti (srednja vrijednost svih geometrijskih izbočina uzduž cijevi – slika 8.6)



Slika 8.6 – turbulentni profil brzina u kružnoj cijevi sa apsolutnom hrapavošću k_s

U kojoj mjeri će turbulentno strujanje biti pod utjecajem hrapavosti ovisi i o intenzitetu viskoznih utjecaja u samoj blizini konture cijevi. Uz pretpostavku da je debljina viskoznog podsloja $10 l_v$ razlučuju se dva slučaja, slučaj hidraulički glatke cijevi $k_s \ll 10 l_v$ (hrapavost ne „penetrira“ u zonu turbulencije i posljedično nema utjecaj na strujanje u turbulentnoj zoni) i slučaj hidraulički hrapave cijevi $k_s \gg 10 l_v$ (hrapavost „penetrira“ u zonu turbulencije i ima znatniji utjecaj na strujanje od utjecaja viskoznosti). Između ta dva slučaja naravno postoji i tranzicijsko područje. Bitno je primijetiti da je u spomenutoj klasifikaciji duljina l_v i sama u funkciji intenziteta strujanja te da se s povećanjem brzina duljina l_v smanjuje.

U hrapavoj cijevi čak i uz samu stjenku turbulencija nije prigušena te se upotrebljava univerzalni logaritamski zakon (jednadžba 7.24) koji uz rubne uvjete na položaju $y = k_s \rightarrow u = u_k$ prelazi u oblik:

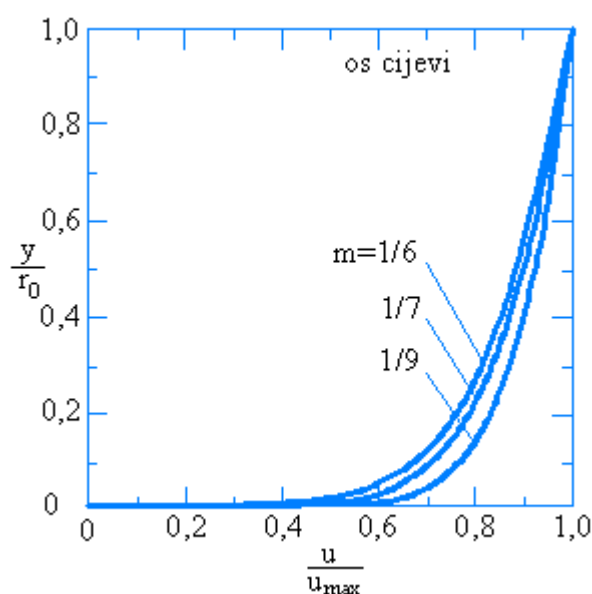
$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{k_s} + \frac{u_k}{u_*} \quad (8.15)$$

Vrijednost člana $\frac{u_k}{u_*}$ vrednovana je temeljem eksperimentalnih istraživanja ($\frac{u_k}{u_*} = 8,5$). Područje primjene jednadžbe 8.15 je $y/r_0 < 0,15$.

Na centralnom području poprečnog presjeka cijevi (vanjska turbulentna zona) $y/r_0 > 0,15$ primjenjuje se jednadžba 8.14 kao i u slučaju glatke cijevi. Za potrebu praktičnog proračuna često se koristi i jednostavnija jednadžba kojom se opisuje turbulentni profil brzina u cijevima:

$$\frac{u}{u_{\max}} = \left(\frac{y}{r_0} \right)^m \quad (8.16)$$

uz odabir koeficijenta potencije m prema Reynolds-ovom broju ($m = 1/6$ za $Re \approx 4 \times 10^3$; $m = 1/7$ za $Re \approx 10^5$; $m = 1/9$ za $Re \approx 10^6$).



Slika 8.7 – profili brzina (bezdimenzionalni) za cijevi kružnog poprečnog presjeka prema jednadžbi 8.16

8.5.2 Otpor trenja

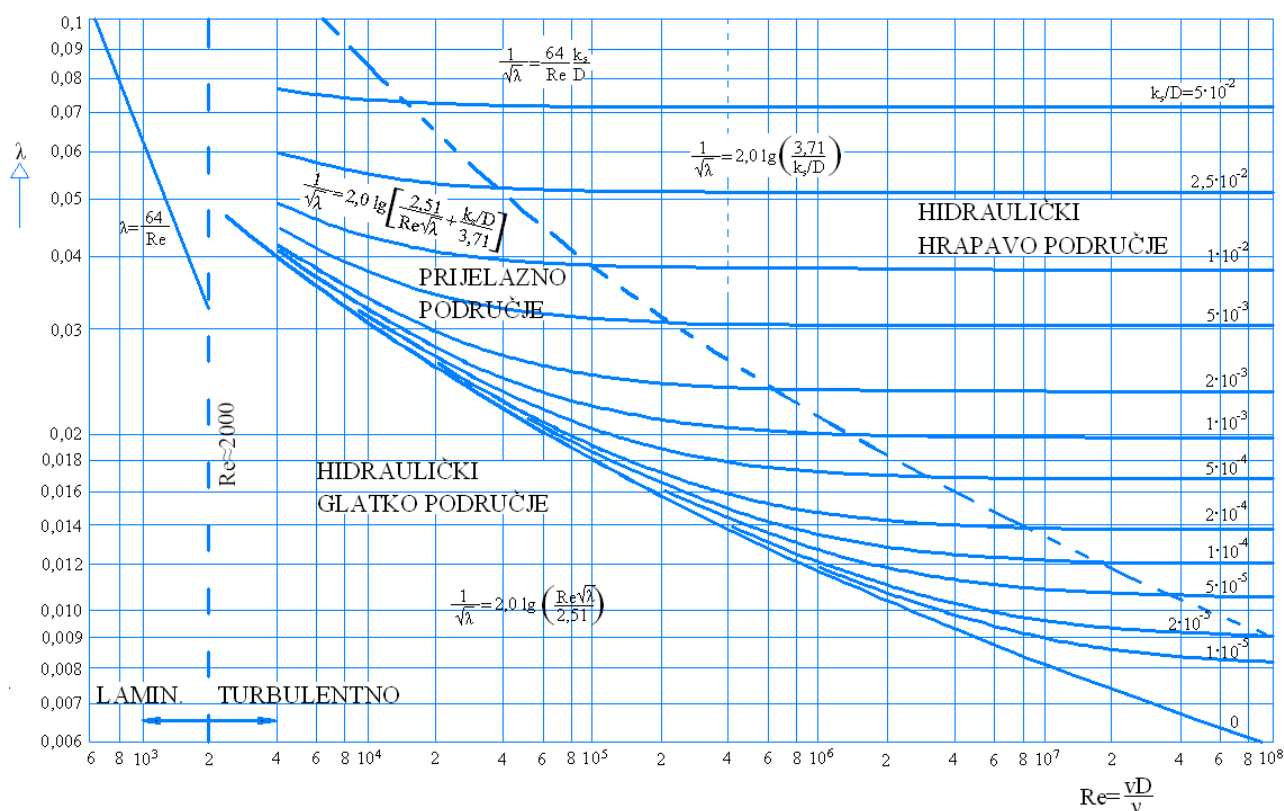
Otpor trenja u turbulentnom strujanju kroz cijev bez obzira na izražavanje kroz posmična naprezanja uz stjenku τ_0 ili gubitak mehaničke energije h_V povezuje se sa raspodjelom brzina. Obzirom da su gubici h_V proporcionalni kvadratu srednjih brzina u proticajnom presjeku V uobičajena je upotreba izraza prema Darcy-Weichbach:

$$h_V = \lambda \frac{L V^2}{D 2g} \quad (8.17)$$

U jednadžbi λ predstavlja bezdimenzionalni koeficijent trenja prema Darcy-Weichbach. Upotrebom jednadžbe 8.4 dobiva se i izraz za posmična naprezanja uz stjenku cijevi:

$$\tau_o = \frac{\lambda}{4} \rho \frac{V^2}{2} \quad (8.18)$$

Relativan utjecaj viskoznosti proticajne tekućine i apsolutne hrapavosti pri srednjoj brzini V u proticajnom presjeku promjera D se definira putem dva bezdimenzionalna parametra, Reynolds-ovim brojem Re i relativnom hrapavošću k_s / D . Prema tome koeficijent trenja λ je u funkciji obe bezdimenzionalne veličine $\lambda = f(Re, k_s/D)$. Vrijednosti koeficijenta trenja λ su evaluirane temeljem velikog broja eksperimenata u kojima je korišten široki raspon vrijednosti Re i k_s/D . Prikaz rezultata eksperimentalnih analiza prikazan je u Moody-jevom dijagramu (1944 – slika 8.8).



Slika 8.8 – Moody-jev dijagram za odabir vrijednosti koeficijenta trenja λ kao funkcije bezdimenzionalnih parametara Re i k_s/D

Na području hidraulički glatke cijevi koeficijent otpora λ je samo u funkciji Re te vrijedi slijedeći empirijski izraz:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,01 \lg(Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 = 2,01 \lg \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51} \quad (8.19)$$

Na području hidraulički hrapave cijevi (turbulentno hrapavi režim) koeficijent otpora λ je samo u funkciji k_s / D te vrijedi slijedeći empirijski izraz:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,01 \lg \frac{k_s}{D} + 1,14 = 2,01 \lg \frac{3,71}{k_s / D} \quad (8.20)$$

U prelaznom području hidraulički hrapave cijevi (prelazni režim) koeficijent otpora λ je u funkciji Re i k_s / D te vrijedi slijedeći empirijski izraz (Colebrook i White, 1938):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,01 \lg \left[\frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{k_s / D}{3,71} \right] \quad (8.21)$$

U prelaznom području pri povećanju Reynolds-ovog broja povećava se i utjecaj relativne hrapavosti kao direktna posljedica smanjenja debljine viskoznog podsloja.

Prethodno izložene jednadžbe za definiranje vrijednosti koeficijenta trenja λ (8.19 ; 8.20 i 8.21) su dane u eksplicitnoj formi te se za praktičnu upotrebu može koristiti i eksplicitni izraz prema Sweme i Jain (1976):

$$\lambda = \frac{0,25}{\left[\lg \left(\frac{k_s}{3,7D} + \frac{5,74}{Re^{0,9}} \right) \right]^2} \quad (8.22)$$

sa područjem primjene u rasponu vrijednosti relativne hrapavosti i Reynolds-ovih brojeva $10^{-6} < k_s / D < 10^{-2}$; $4 \times 10^3 < Re < 10^8$.

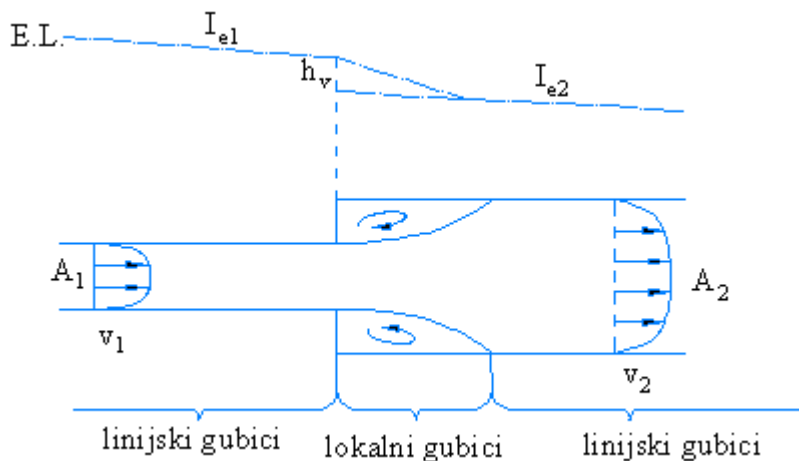
Moody-jevim dijagramom definirane su i vrijednosti koeficijenta trenja λ i u području laminarnog strujanja ($Re < 2000$) u kome vrijedi odnos:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (8.23)$$

8.6 Nejednoliko strujanje u cijevima – lokalni gubici

Cjevovod nije sadržan samo od dionica cijevi sa jednolikim poprečnim presjekom već sadrži i razne fazonske komade kojima se omogućuje proširenje, suženje ili skretanje trase cjevovoda. Takvi fazonski komadi uzrokuju lokalne gubitke. Na slici 8.9 dan je prikaz naglog proširenja cijevi.

Razvijeni profil brzina koji se pojavljuje u užoj cijevi nailaskom na naglo proširenje deformira se zbog inercije čestica tekućine te dolazi do odvajanja graničnog sloja i formiranja zona intenzivnog vrtloženja sa povećanom disipacijom. Na određenoj udaljenosti nizvodno od pozicije naglog proširenja ponovno se uspostavlja jednoliko strujanje sa odgovarajućim profilom brzina.



Slika 8.9 – lokalni energetske gubici uslijed naglog proširenja cijevi

Energetska linija na području cijevi sa presjekom A_1 ima gradijent I_{E1} a nakon uspostavljanja profila brzina nizvodno od promjene presjeka na području cijevi sa presjekom A_2 uspostavljen je i konstantan gradijent I_{E2} . Dodatni energetske gubitak lokalnog karaktera definira se izrazom:

$$h_v = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (8.24)$$

koji ima karakter proporcionalnosti sa kinetičkom energijom izraženom u obliku brzinske visine. Koeficijent lokalnog gubitka ξ ima bezdimenzionalni karakter. Referentna brzina V u praksi uglavnom se odnosi na brzinu u nizvodnoj dionici cjevovoda, u primjeru sa slike na brzinu V_2 . Na slici 8.10 dan je prikaz karakterističnih vrijednosti koeficijenata lokalnih gubitaka na koje se nailazi u praksi projektiranja cjevovoda. Prikazane vrijednosti dobivene su temeljem eksperimentalnog istraživanja a analitičko rješenje moguće je dobiti samo za mali broj lokalnih promjena u geometriji poprečnog presjeka kao što je to primjer naglog proširenja.

Uobičajena zadaća projektanta je određivanje promjera cijevi po dionicama cjevovoda uz paralelnu analizu ili definiranje potrebnih energetske uvjeta kojima se ostvaruju preporučene vrijednosti brzine strujanja. Primjeri energetske i piezometarske linije za slučaj cjevovoda koji povezuje dvije komore te za slučaj cjevovoda od komore do slobodnog istjecanja uz ugrađenu pumpu dani su na slikama 8.11. i 8.12.

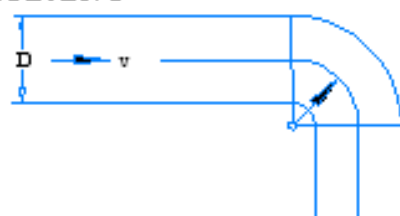
ULAZ - zaobljeni $\zeta = 0,2$
 - oštrobridni $\zeta = 0,5$

V ~ nakon ulaza

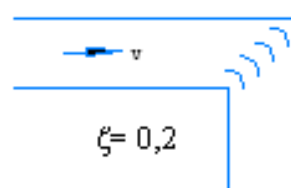
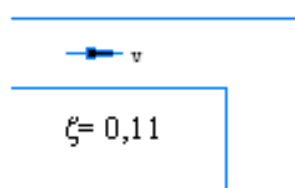
IZLAZ (ULAZ U KOMORU) $\zeta = 1,0$

V ~ prije ulaza u komoru

KOLJENO



r_m/D	ζ
1	$\zeta = 0,35$
2	$\zeta = 0,19$
4	$\zeta = 0,16$
6	$\zeta = 0,21$
8	$\zeta = 0,28$
10	$\zeta = 0,32$



SUŽENJE



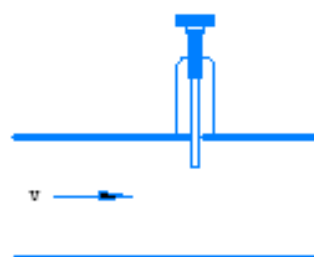
D_2/D_1	$\Theta = 60^\circ$	180°
0,0	$\zeta = 0,08$	0,50
0,2	$\zeta = 0,08$	0,49
0,4	$\zeta = 0,07$	0,42
0,6	$\zeta = 0,06$	0,32
0,8	$\zeta = 0,05$	0,18
0,9	$\zeta = 0,04$	0,10

PROŠIRENJE



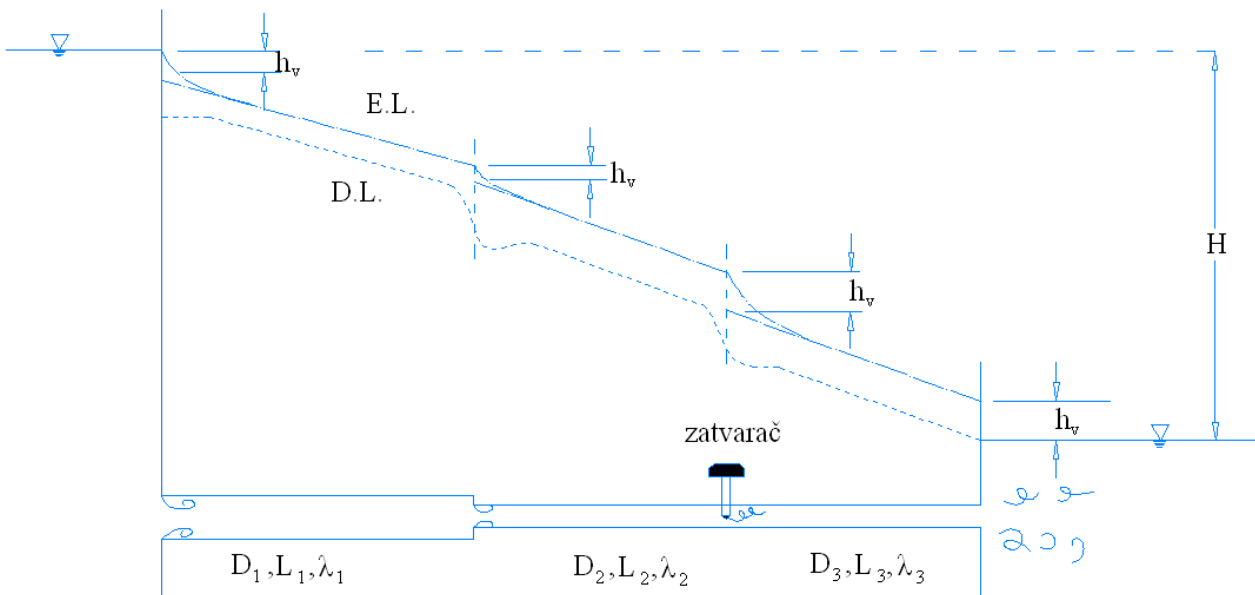
D_1/D_2	$\Theta = 10^\circ$	180°
0,0		1,00
0,2	$\zeta = 0,13$	0,92
0,4	$\zeta = 0,11$	0,72
0,6	$\zeta = 0,06$	0,42
0,8	$\zeta = 0,03$	0,16
teoretski	$\zeta = (1 - (D_1/D_2))^2$	

PLOČASTI ZATVARAČ

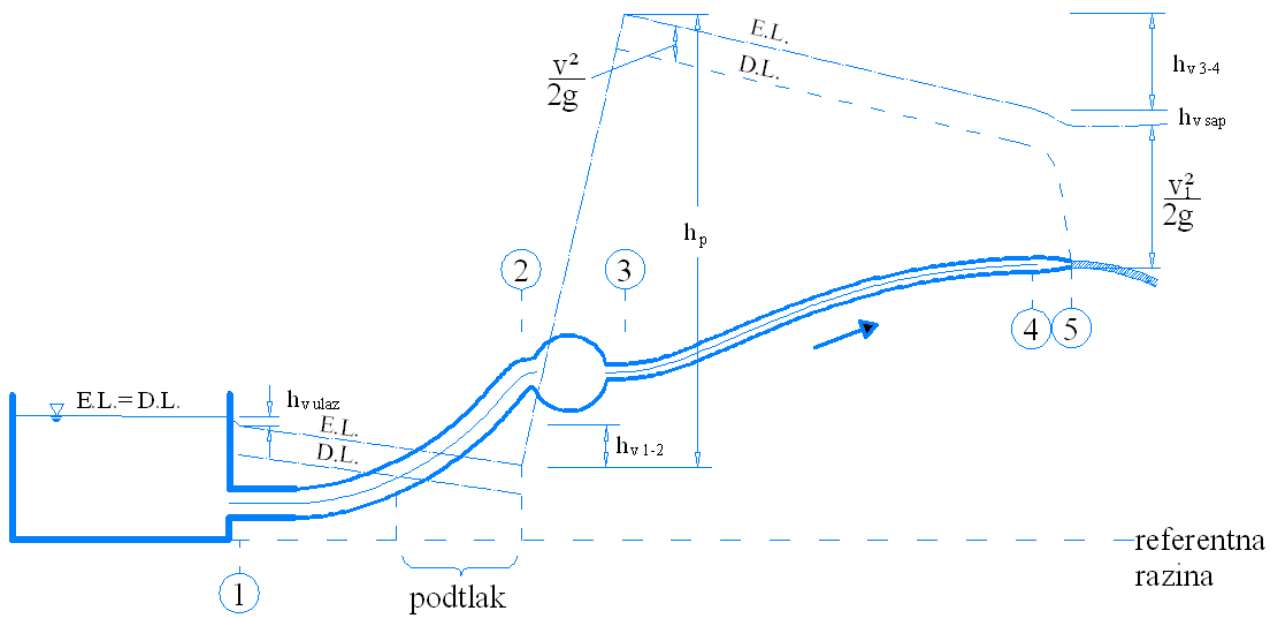


stupanj otvorenosti	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
ζ	0,2	1,15	5,6
			24,0

Slika 8.10 – koeficijenti lokalnih gubitaka za određivanje energetskih lokalnih gubitaka u cjevovodu kružnog poprečnog presjeka



Slika 8.11 - Primjer energetske i piezometarske linije za cjevovod koji povezuje dvije komore

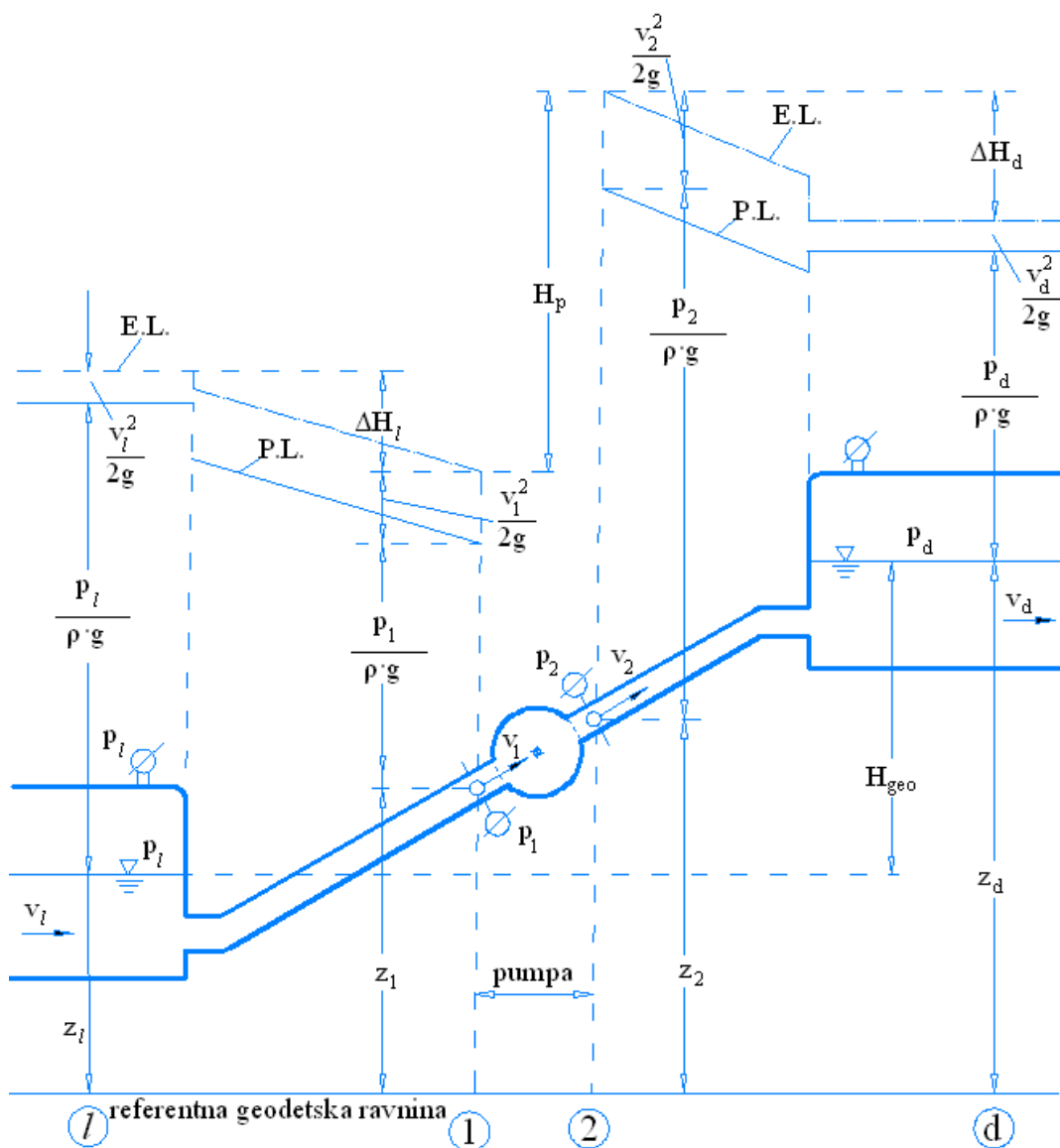


Slika 8.12 - Primjer energetske i piezometarske linije za cjevovod koji povezuje komoru sa slobodni istjecanjem uz ugradnju pumpe

8.7 Pumpe i turbine

Pumpe i turbine predstavljaju strojeve u kojima se putem ugrađenih lopatica u tok unosi ili iz toka ekstrahira mehanička energija. Zbog toga se na poziciji ugrađenih pumpi ili turbina pojavljuje lokalni skok (pumpa) odnosno pad (turbina) energetske linije strujanja.

Osnovni parametri u hidrauličkom proračunu pumpe su visina dizanja pumpe H_P i protok kroz pumpu Q_P koji se putem ugradnje pumpe želi održati u sustavu (slika 8.13).



Slika 8.13 – Energetska i piezometarska linija u sustavu pod tlakom sa ugrađenom pumom

Primjena Bernoulli-jeve jednadžbe za strujanje realne tekućine u sustavu pod tlakom daje rješenje za vrijednost dizanja pumpe H_P :

$$H_A = (z_d - z_l) + \frac{p_d - p_l}{\rho \cdot g} + \frac{v_d^2 - v_l^2}{2g} + \Delta H_d + \Delta H_l \quad (8.25)$$

gdje je:

$H_{geo} = z_d - z_l$ razlika geodetskih razina slobodnih vodnih lica u lijevoj i desnoj komori

$\frac{p_d - p_l}{\rho \cdot g}$ razlika tlačne energije u lijevoj i desnoj komori

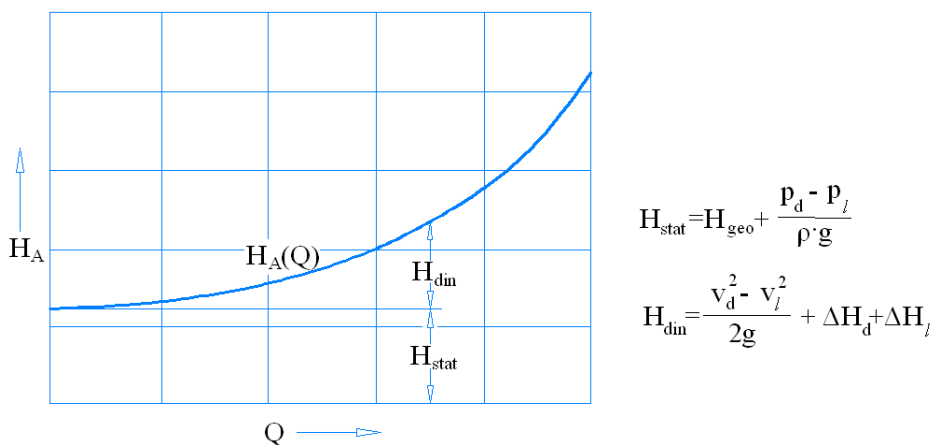
$\frac{v_d^2 - v_l^2}{2g}$ razlika kinetičke energije u lijevoj i desnoj komori (pri velikim spremnicima ove brzine

usvajaju se sa vrijednosti 0)

ΔH_1 suma gubitaka mehaničke energije od presjeka „l“ do „1“

ΔH_d suma gubitaka mehaničke energije od presjeka „2“ do „d“

Visina dizanja H_P sadrži dvije komponente. Jedna je statička H_{P-stat} i ne ovisi o protoku Q_P dok je dinamička komponenta H_{P-din} ovisna o protoku Q_P (slika 8.14).



Slika 8.14 – Podjela visine dizanja pumpe H_P na statičku i dinamičku komponentu

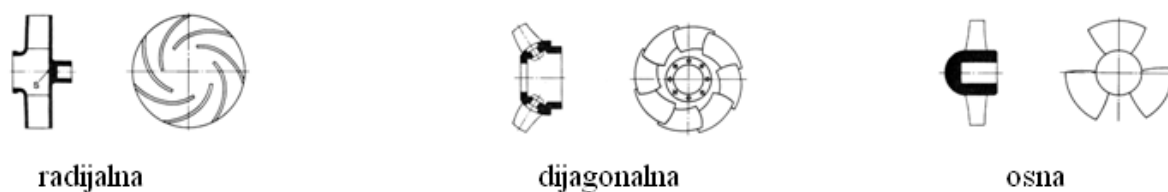
Potrebna snaga pumpe definirana je izrazom:

$$P = \frac{\rho \cdot g \cdot Q_P \cdot H_P}{\eta} \quad (8.26)$$

pri čemu se oznaka η odnosi na stupanj efikasnosti prenosa snage pumpe na proticajnu tekućinu. Vrijednost η uvijek je manja od 1.

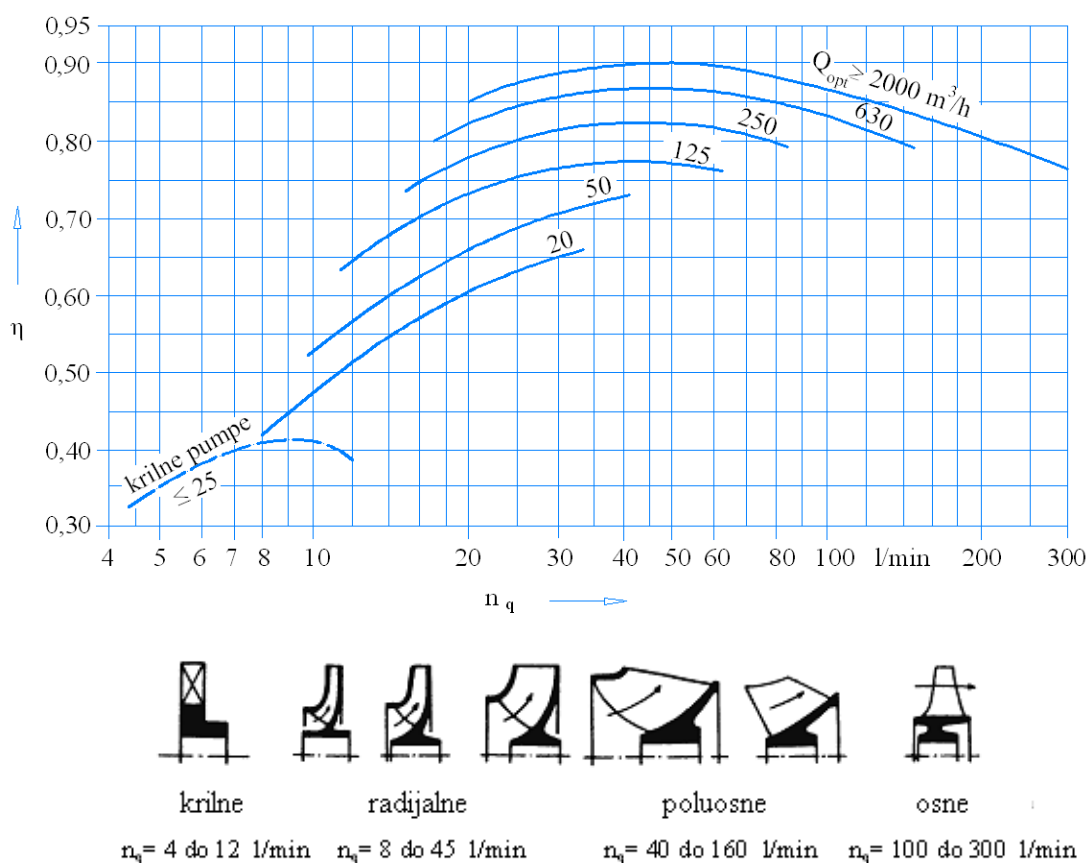
Ovisno o ugrađenom tipu pumpe, proizvoljna radna točka pumpe (Q_P , H_P) postiže se pri odgovarajućem broju okretaja n_P . Ovisno o broju okretaja n_P postiže se i odgovarajući stupanj η a što znači da postoji i optimalni broj okretaja n_{P-opt} pri kojem svaki pojedini tip pumpe ostvaruje maksimalni odnosno optimalni η_{opt} .

U osnovi, prema načinu strujanja pumpe se dijele na radijalne, dijagonalne ili osne (slika 8.15).



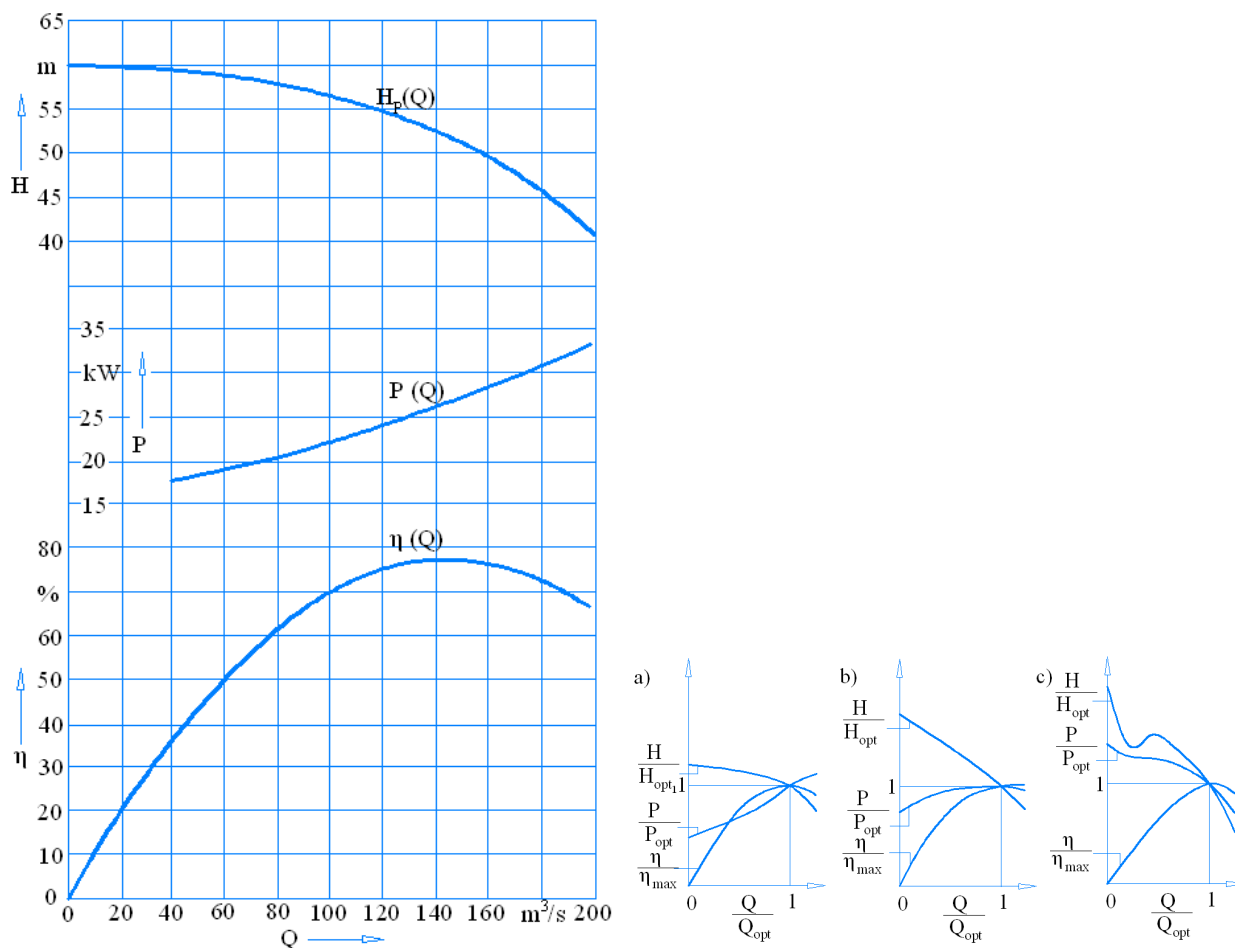
Slika 8.15 – podjela pumpe prema načinu strujanja

Pri izboru pumpe uobičajeno su na raspolaganju dvije osnovne informacije. Potrebni protok Q_P i potrebna visina dizanja pumpe H_P . Obzirom da promjer pumpe D uobičajeno nije proizvoljan te da broju okretaja rotora pumpe n ovisi i učinkovitost rada pumpe η , protok Q_P predstavlja osnovni parametar pri izboru tipa pumpe (slika 8.16)



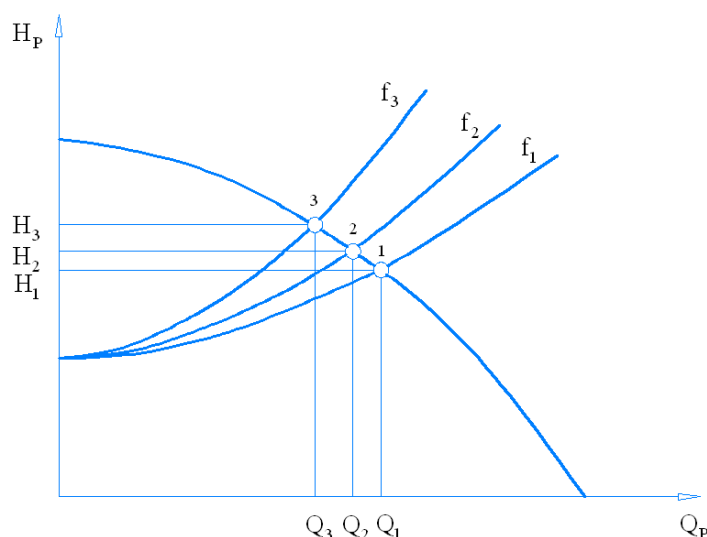
Slika 8.16 - učinkovitost η za različite tipove pumpe u ovisnosti o specifičnom broju okretaja n_q i protoku Q_P (n_q – specifični broj okretaja pri kojem se protok od $1\text{m}^3/\text{s}$ vertikalno transportira na visinu od 1m)

Prikaz ovisnosti parametara H_P , P i η o protoku Q_P grafički se izražava sa dijagramom karakteristika pumpe (slika 8.17).



Slika 8.17 – dijagram karakterista pumpe pri definiranom broju okretaja $n=14500/\text{min}$ (lijevo) i pri različitim specifičnim brojevima okretaja n_q (desno; (a) radijalna pumpa $n_q=20/\text{min}$, (b) polu radijalna pumpa $n_q=80/\text{min}$, (c) osna pumpa $n_q=200/\text{min}$)

Ukoliko se želi regulirati protok kroz cjevovodni sustav potrebno je postavljanje regulacionog zatvarača. Smanjenje stupnja otvorenosti zatvarača uzrokuje povećane energetske gubitke u profilu zatvarača i odgovarajuće smanjenje proticajnog protoka Q_P . Pri tome se povećava strmost parabole dinamičke komponente dizanja pumpe H_{din} a povećava se i visine dizanja pumpe H_P (vidi sliku 8.14 i 8.18).



Slika 8.18 – povećanje dizanja pumpe H_p ($H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow H_3$) pri smanjenju proticajnog protoka Q_p ($Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$) uslijed zatvaranja regulacionog zatvarača

Turbine se između ostalog pojavljuju i u objektima namjenjenim za korištenje vodnih snaga. Ovisno o raspoloživoj razlici potencijala gornje i doljnje vode usporni objekti (brane) dijele se na niskotlačne, srednje i visokotlačne. Prema Sigloch (1983) karakteristične vrijednosti razlika razina doljnje i gornje vode ΔH nalaze se u rasponu:

Niskotlačna energetska postrojenja $\Delta H < 15\text{m}$

Srednjetačna energetska postrojenja $\Delta H = 15\text{-}50\text{m}$

Visokotlačna energetska postrojenja $\Delta H > 50\text{m}$

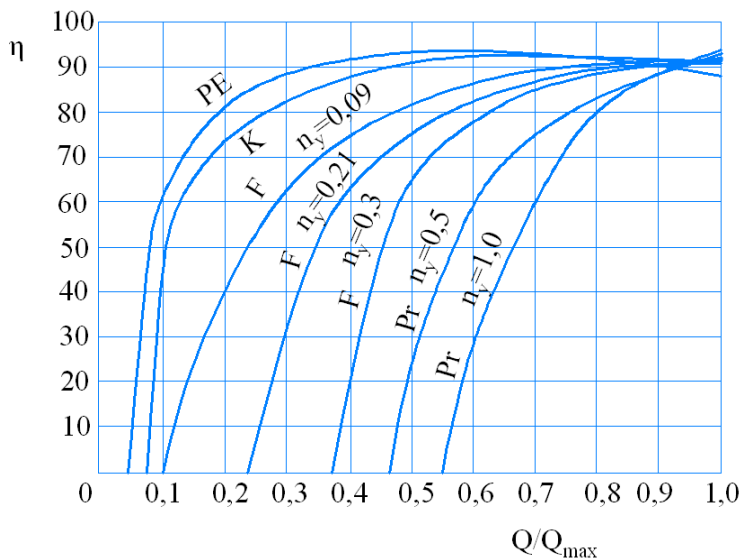
Konstruktivna izvedba ugradnje turbina u takve objekte također se razlikuje. U sljedećoj tablici dane su preporuke (Sigloch, 1983) za adekvatnu primjenu pojedinog tipa turbine.

Tip turbine	broj okretaja n_q [min^{-1}]	pad H_T [m]
Pelton	4-70 (1-15)	2000-100 (2000-100)
Francis (s malim brojem okretaja turb. kola)	30-125 (20-40)	700-150
Francis (s normalnim brojem okretaja turb. kola)	125-200 (40-80)	150-80
Francis (s velikim brojem okretaja turb. kola)	300-500 (80-160)	80-10 (-1)
S vrlo velikim brojem okretaja	200-300	80-10 (-1)
Kaplan i cijevne turbine	40-800 (90-560)	80-2 (-1)

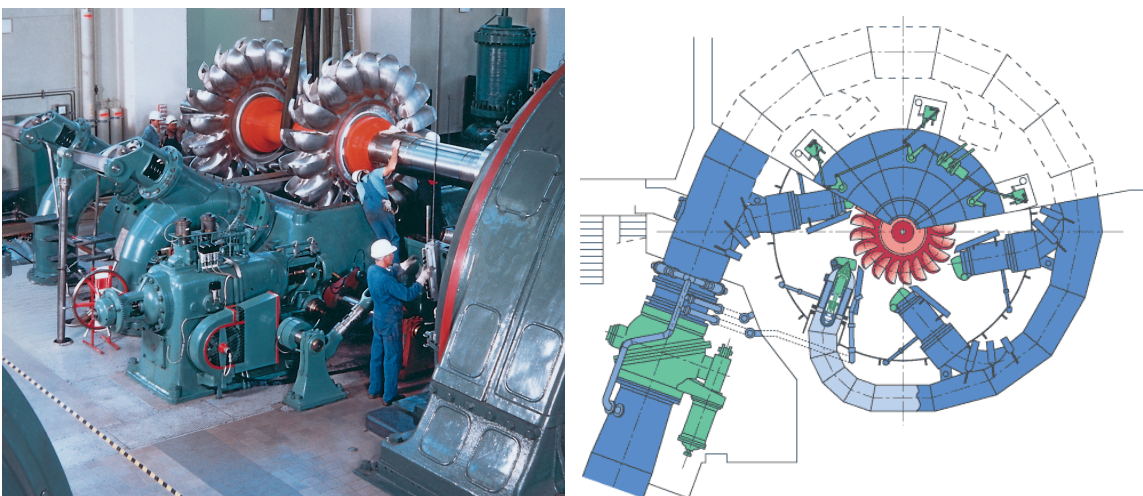
Snaga koja se ostvaruje radom turbine izražava se na način:

$$P_t = \rho \cdot g \cdot Q_T \cdot H_T \cdot \eta_T \quad (8.27)$$

Isto kao i kod pumpi, koeficijent iskoristivosti η_T u turbinama manji je od 1. Na slici 8.19 prikazani su koeficijent iskoristivosti turbina η_T u ovisnosti o proticajnom protoku Q_T . Peltonova turbina pokazuje najveći stupanj efikasnosti pri prenosu mehaničke energije vodenog toka na kolo turbine ($\eta_{Tmax} \approx 95\%$). Na slikama 8.20, 8.21 i 8.22 dani su shematski prikazi i primjeri fizičke izvedbe Peltonove, Francis-ove i Kaplanove turbine.



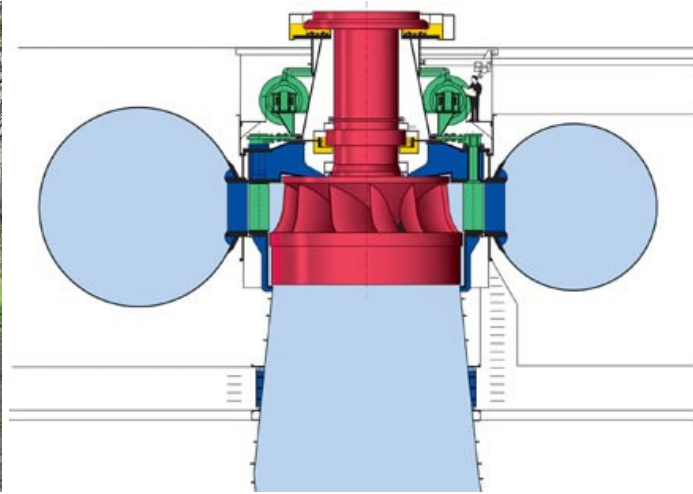
Slika 8.19 – koeficijent iskoristivosti turbina η_T u ovisnosti o proticajnom protoku Q_T



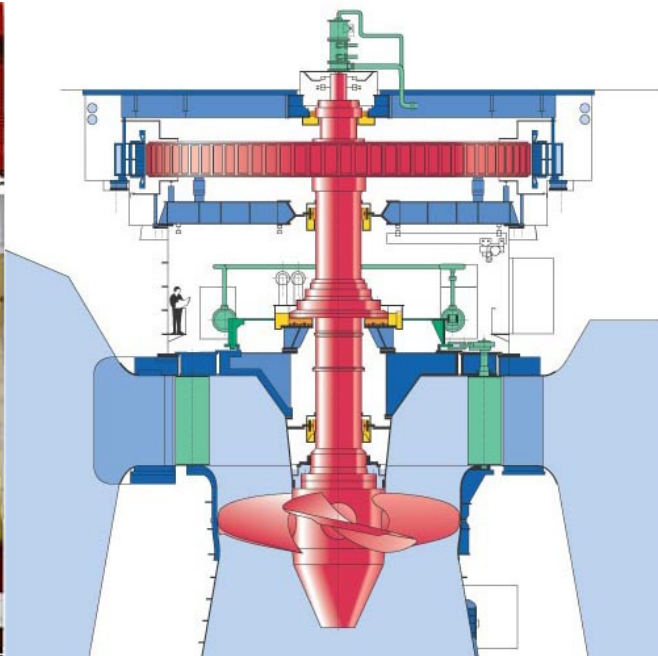
Slika 8.20 - Pelton turbina

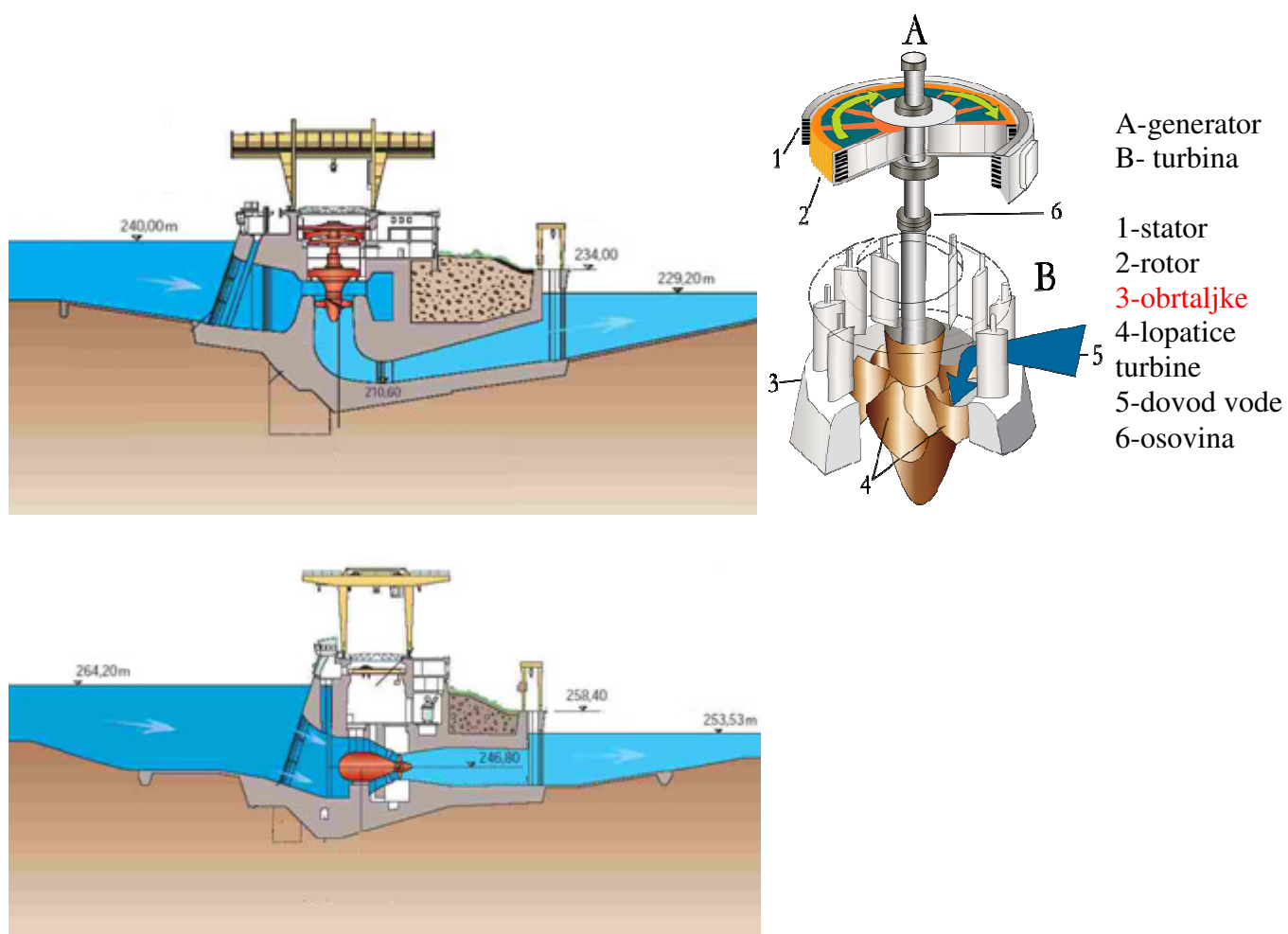


Slika 8.21 - Francis turbina



Slika 8.22 – Kaplan turbina





Slika 8.23 – Primjeri niskotlačnih postrojenja za izvedenom Kaplan (gore) i cijevnom turbinom (dolje)

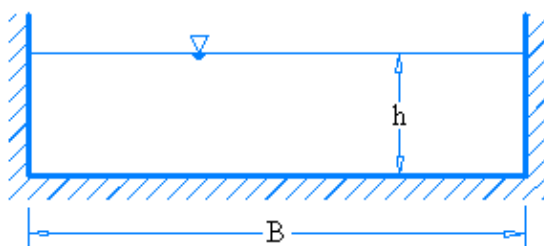
9 Tečenje u otvorenim vodotocima

9.1 Proticajni presjek

Forma proticajnog presjeka je važan faktor u tečenju sa slobodnim vodnim licem budući da se upravo na mjestu kontakta tekućine i konture korita pojavljuje izvorište izmjene količine gibanja u formi posmičnih naprezanja. U otvorenim vodotocima sa slobodnim vodnim licem bitni su pojmovi poput proticajne površine A , omočenog opsega O i hidrauličkog radijusa $R_h = A/O$. Na slici 9.1 dan je prikaz pravokutnog poprečnog presjeka otvorenog vodotoka. Hidraulički radijus prema tome iznosi :

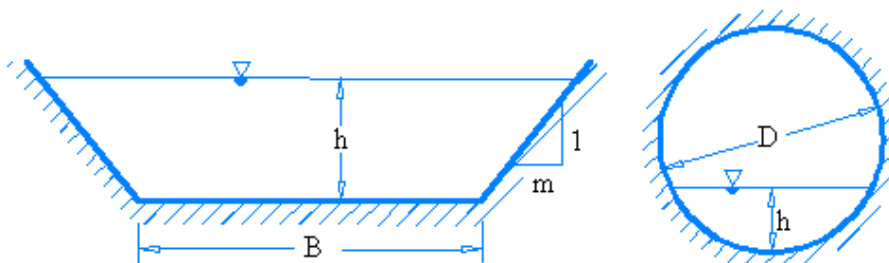
$$R_h = \frac{A}{O} = \frac{h}{1 + 2h/B} \quad (9.1)$$

Odnosno za slučaj korita vrlo velike širine $h/B \rightarrow 0$ gornji izraz poprima oblik $R_h = h$.



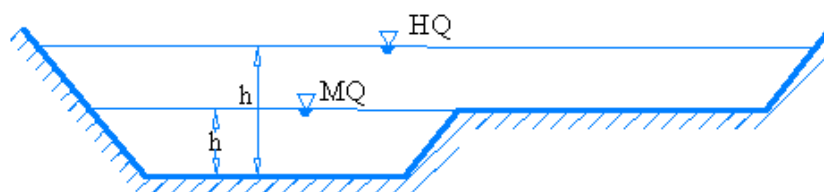
Slika 9.1 - prikaz kanala sa pravokutnim poprečnim presjekom sa osnovnim geometrijskim obilježjima

U izgradnji umjetnih kanala vrlo često se koristi trapezna forma proticajnog presjeka sa nagibom pokosa m (slika 9.2 lijevo). Kanalizacijski kanali često se izvode i u formi kružnih poprečnih cijevi, pa iako su u najvećem broju slučajeva kanali ukopani, cijevi su ispunjenje sa zrakom pod atmosferskim tlakom odnosno postoji slobodno vodno lice (slika 9.2 desno).



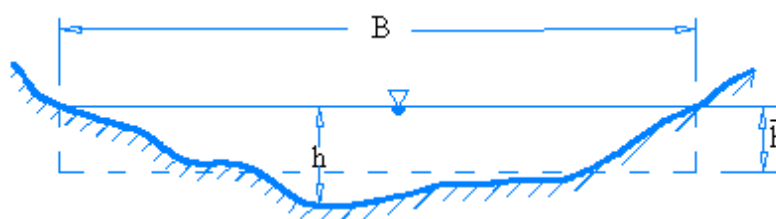
Slika 9.2 - prikaz kanala sa trapeznim i kružnim poprečnim presjekom sa osnovnim geometrijskim obilježjima

U reguliranim vodotocima često se pojavljuju i kompozitni kanali, u kojim se za vrijeme srednjih (MQ) i niskih vodostaja voda zadržava samo u glavnom koritu. Za vrijeme jačih dotoka na slivu i pojave poplavnih valova (HQ) poplavljuje se i inundacijski dio profila. (slika 9.3)



9.3 - kompozitni kanal sa glavnim i inundacijskim dijelom korita

Tečenje koje se pojavljuje u ovakvim koritima je jednoliko zbog jednolikosti samih proticajnih profila uzduž kanala a korita se kao takva pojavljuju samo kroz ljudsku djelatnost gradnje. Nasuprot tome prirodna korita su nejednolika sa većim ili manjim stupnjem nejednolikosti. Dubina se u slučaju prirodnih korita referencira na vertikalnu udaljenost između kote slobodnog vodnog lica i najniže kote dna (slika 9.4).



9.4 - proticajni presjek u prirodnom koritu

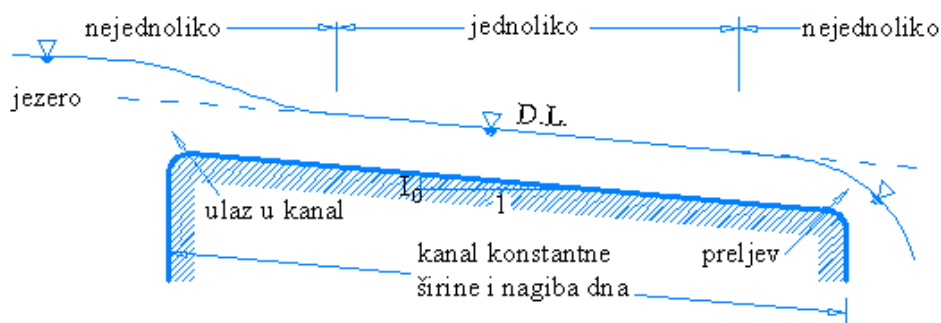
Ukoliko su obale sačinjene od prirodno otpornog materijala koji se odupire djelovanju posmičnog naprezanja, profil će ostati stabilan i nepromijenjen tijekom vremena. Ukoliko to nije slučaj te dolazi do erozije ili deponiranja materijala matičnog korita profil će se mijenjati tijekom vremena što u uzdužnom pogledu na korito rezultira sa meandriranjem prirodnog korita. U nastavku se neće analizirati mehanizmi koju su odgovorni za eroziju, pronos i deponiranje materijala matičnog korita.

9.2 Klasifikacija tečenja

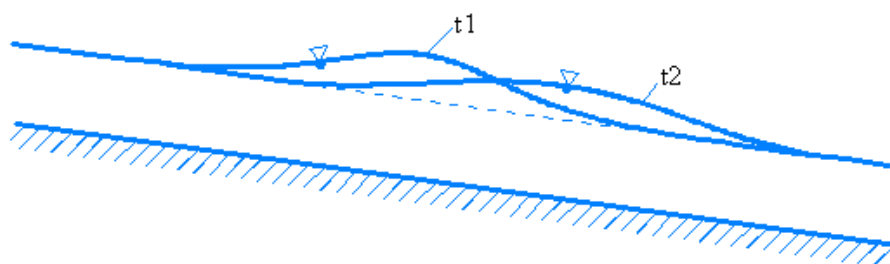
Klasifikacija otvorenih vodotoka svodi se podjelu prema prostornoj (jednoliko, nejednoliko – slika 9.5) i vremenskoj (stacionarno i nestacionarno – slika 9.6) varijaciji, načinu-vidu tečenja (laminarno, turbulentno) te režimu tečenja (mirno, kritično, silovito), (Rouse, 1950).

Reynolds-ov broj za otvorene vodotoke izražen je temeljem vrijednosti srednjih brzina u proticajnom presjeku V , hidrauličkog radijusa R_h i kinematske viskoznosti ν :

$$Re_h = \frac{V 4R_h}{\nu} \quad (9.2)$$



Slika 9.5 – primjer dionica jednodolnog i nejednodolnog tečenja sa slobodnim vodnim licem



Slika 9.6 – primjer nestacionarnog tečenja sa slobodnim vodnim licem (profil poplavnog vala u trenutku t_1 i u kasnijem trenutku t_2)

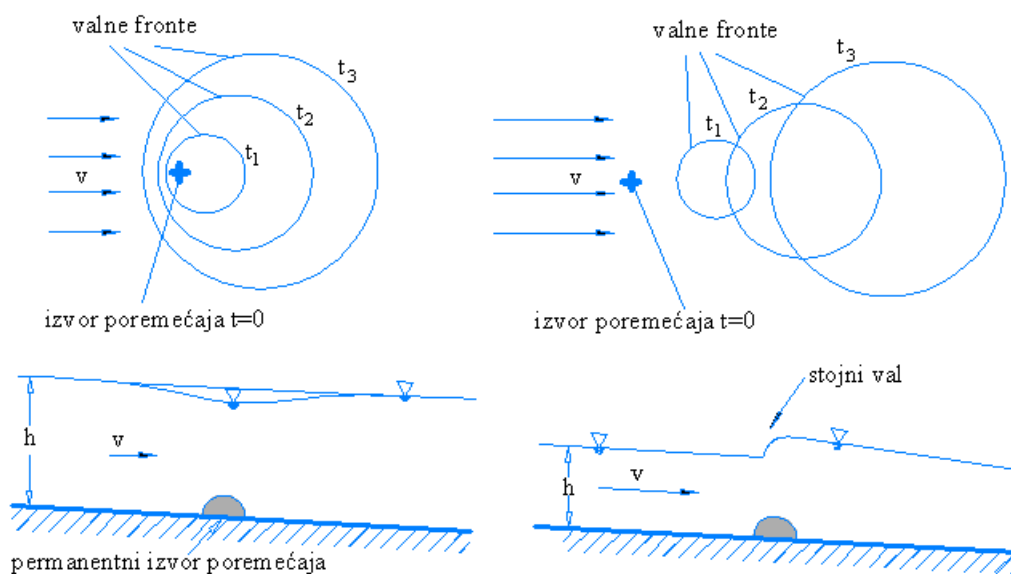
Usvajanjem kritičnog Reynoldsovog broja pri kojem dolazi do translacije iz laminarnog u turbulentno tečenje $Re_{krit} \approx 2000$ kako je to komentirano u prethodnom poglavlju o tečenju u sustavima pod tlakom te usvajanjem odnosa između promjera i hidrauličkog radijusa $D = 4R_h$ dobiva se kritični Reynolds-ov broj za otvorene vodotoke $Re_{krit} \approx 500$.

Primjenom zakona o čuvanju količine gibanja pri nastupu valnog poremećaja u vodi sa dubinom h dobiva se izraz o brzini (propagaciji) tog poremećajnog vala uz pretpostavku da je njegova valna duljina znatno dulja od dubine (tzv. plitkovodni val):

$$c = \sqrt{gh} \quad (9.3)$$

Odnos između brzine propagacije c i brzine tečenja u otvorenom kanalu V definira i režim tečenja. Ukoliko je $c < V$ poremećajni val neće uspjeti napredovati uzvodno od položaja promatrača koji je stacioniran na obali. Ukoliko je $c > V$ poremećajni val će napredovati i uzvodno od promatrača bez obzira što se centar poremećaja giba nizvodno od promatrača (slika 9.7). Odnos brzina c i V ustvari predstavlja Froude-ov bezdimenzionalni parametar.

$$Fr = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (9.4)$$



Slika 9.7 – prikaz napredovanja valnog poremećaja za slučaj mirnog (lijevo gore i lijevo dolje $Fr < 1$) i silovitog (desno gore i desno dolje $Fr > 1$) tečenja

9.3 Otpori i karakteristike turbulentnog tečenja

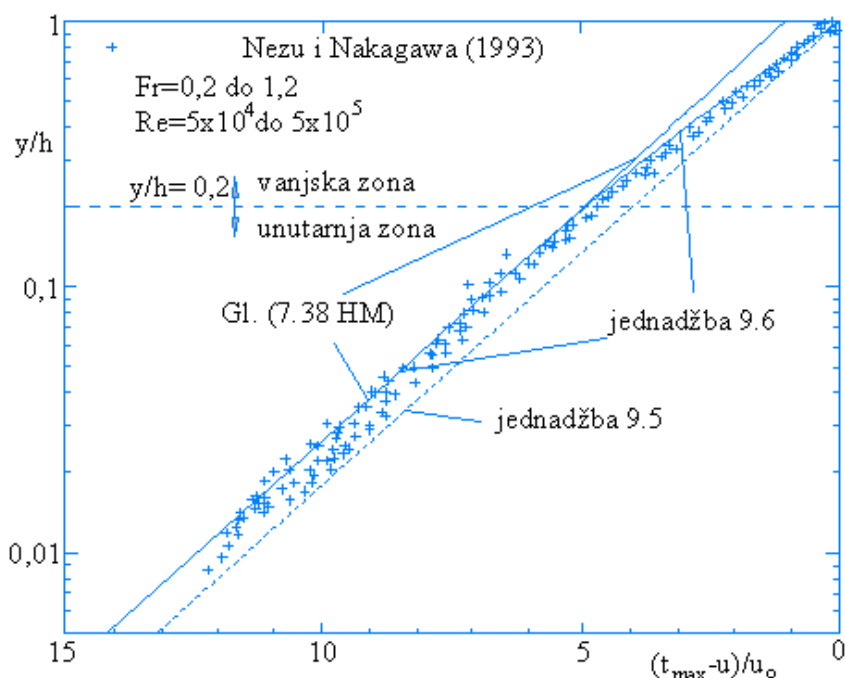
U jednolikom turbulentnom tečenju uz pretpostavku velike širine vodnog lica B naspram dubine h , u području bliskom dnu ($y/h < 0,2$) važeći je logaritamski zakon profila brzina:

$$\frac{u}{u_*} = 2,5 \ln \frac{y}{k_s + 8,5} \quad (9.5)$$

dok je u području bliže vodnom licu ($y/h > 0,6$ i $Re > 5 \times 10^4$) prema Nezu i Nakagawa (1993) odgovarajući izraz:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = -2,5 \ln \frac{y}{h} + 5,0 \Pi \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2h} \right) \quad (9.6)$$

Na slici 9.8 dan je prikaz usporedbe između eksperimentalno izmjerenih profila brzina i logaritamskog zakona prema podacima Nezu i Nakagawa za glatko korito (1993).



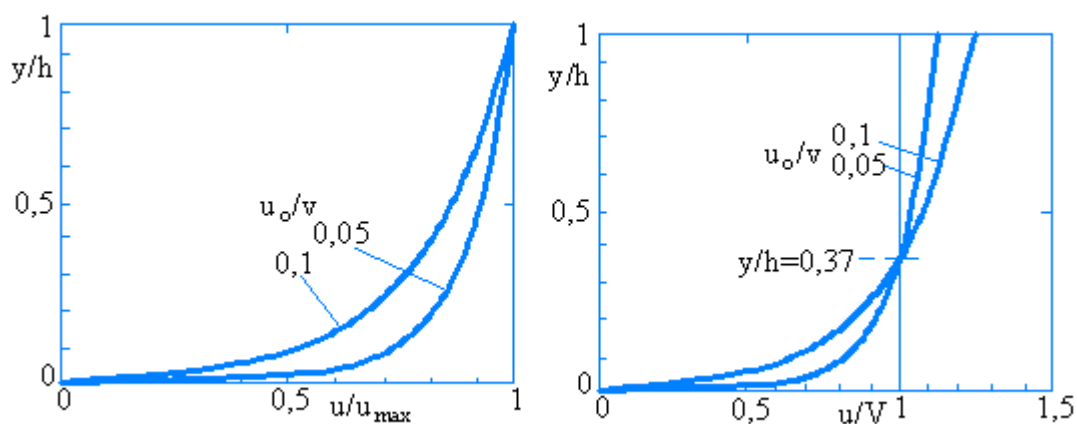
Slika 9.8 - usporedba eksperimentalno izmjerenih profila brzina i logaritamskog zakona prema podacima Nezu i Nakagawa za glatko korito (1993)

Za praktične potrebe moguće je usvajanje pretpostavke valjanosti logaritamskog profila prema jednadžbi 9.5 po cijeloj vertikali od dna do vodnog lica ($0 < y/h < 1$) a što nakon nekoliko analitičkih koraka dovodi do bezdimenzionalnih jednadžbi kojima su definirani odnosi brzina u pojedinoj točki vertikalnog profila brzina u , maksimalne brzine u vertikalnom profilu u_{max} i srednjih brzina u vertikalnom profilu V .

$$\frac{u}{u_*} = 1 + \frac{2,5}{\frac{V}{u_*} + 2,5} \ln \frac{y}{h}$$

$$\frac{u}{V} = 1 + 2,5 \frac{u_*}{V} \left(1 + \ln \frac{y}{h} \right) \quad (9.7a,b)$$

Parametar u_* / V sadrži i informaciju o intenzitetu turbulencije proizvedene uslijed otpora trenja i posljedičnog vrtloženja. Tipične vrijednosti parametra u_* / V nalaze se u rasponu vrijednosti od 0,05 (glatko korito) do 0,1 (hrapavo korito). Na slici 9.9 dan je i prikaz bezdimenzionalnih profila brzina prema jednadžbama 9.7a (lijevo) i 9.7b (desno). Sa slike 9.7 može se uočiti da intenzivnija turbulencija (hrapavije dno) uzrokuje manje „pune“ profile brzina odnosno manje pridnene i veće površinske brzine u usporedbi sa brzinama iz profila glatkog dna. Ovaj detalj bitan je i za praktičnu primjenu pri djelovanju vjetra gdje se sa povećanjem hrapavosti prizemnog sloja omogućava smanjenje brzina vjetra u prizemnom dijelu graničnog sloja.

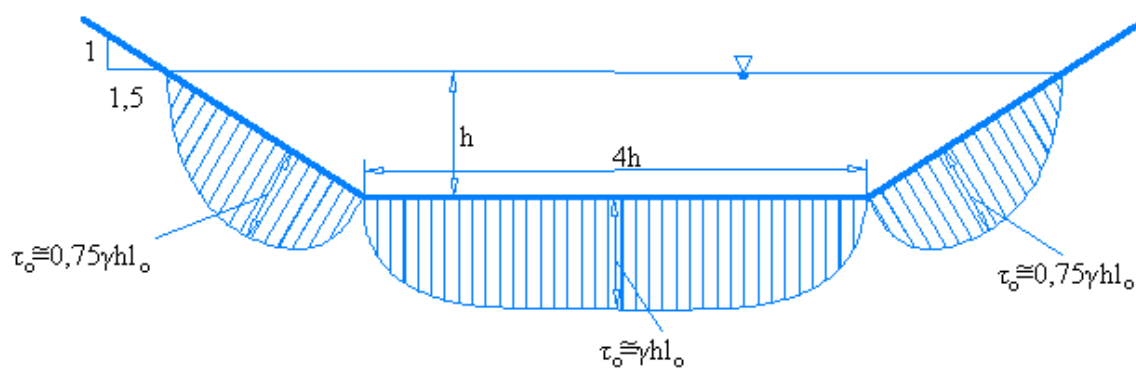


Slika 9.9 - prikaz bezdimenzionalnih profila brzina prema jednačbama 9.7a (lijevo) i 9.7b (desno)

Za praktičnu upotrebu u mjeriteljskoj praksi također je vrijedna i informacija o položaju na kojem se pojavljuje srednja brzina proticajnog presjeka V ($0,4h$ od dna). Ukoliko se usvoji logaritamski profil brzina, popravni Koriolis-ov koeficijent kinetičke energije α na jednolikoj dionici otvorenog vodotoka poprima vrijednost 1,04.

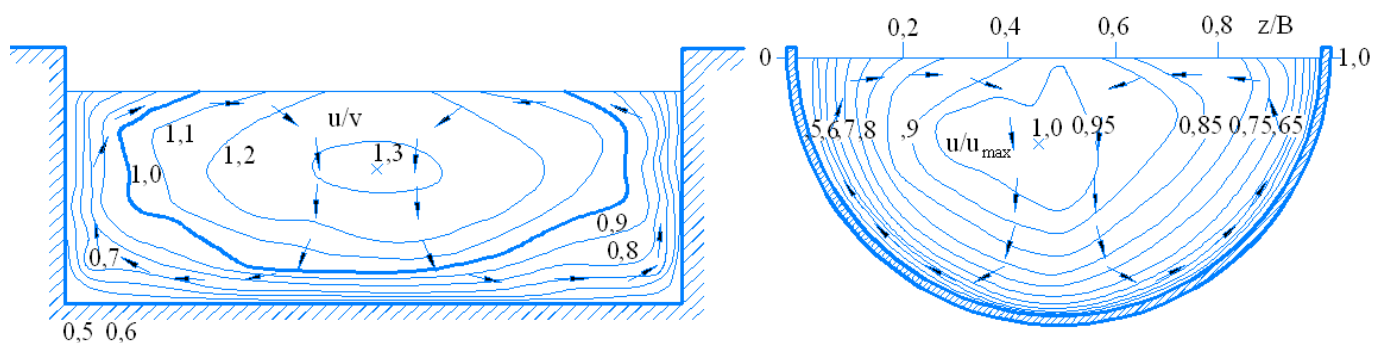
U slučaju kada je širina kanala relativno ograničena tečenje se ne može promatrati kao dvodimenzionalno a kao je to napravljeno u prethodnom dijelu. Lateralni efekt bočnih obala potrebno je uzeti u obzir u slučajevima kada je $B/h < 5$ budući da strujanje postaje izrazito trodimenzionalno.

Na slici 9.10 dan je prikaz raspodjele posmičnih naprezanja po konturama trapeznog proticajnog profila.



Slika 9.10 - prikaz raspodjele posmičnih naprezanja po konturama trapeznog proticajnog profila (Chow, 1959)

Posljedica nejednolikog profila naprezanja je i anizotropija turbulencije te pojava „slabog“ sekundarnog strujanja u proticajnom profilu. Na slici 9.11 naznačena su i ta sekundarna strujanja u proticajnom profilu. Pomicanje pozicije maksimalnih brzina strujanja sa površine u dubinu također je posljedica takvog sekundarnog strujanja.



Slika 9.11 – izo linije brzina u profilu pravokutnog i polukružnog proticajnog presjeka pri turbulentnom tečenju sa slobodnim vodnim licem

Logaritamski profili brzina u ovakvim proticajnim presjecima nisu odgovarajući osim u zoni koja je vrlo bliska koritu. 3D profili brzina uobičajeno se analiziraju sa numeričkim modelima a vrijednosti Koriolis-ovog popravnog koeficijenta kinetičke energije α na jednolikoj dionici poprimaju vrijednosti i do 1,36 (Chow 1959).

9.4 Jednadžba jednolikog tečenja u kanalu

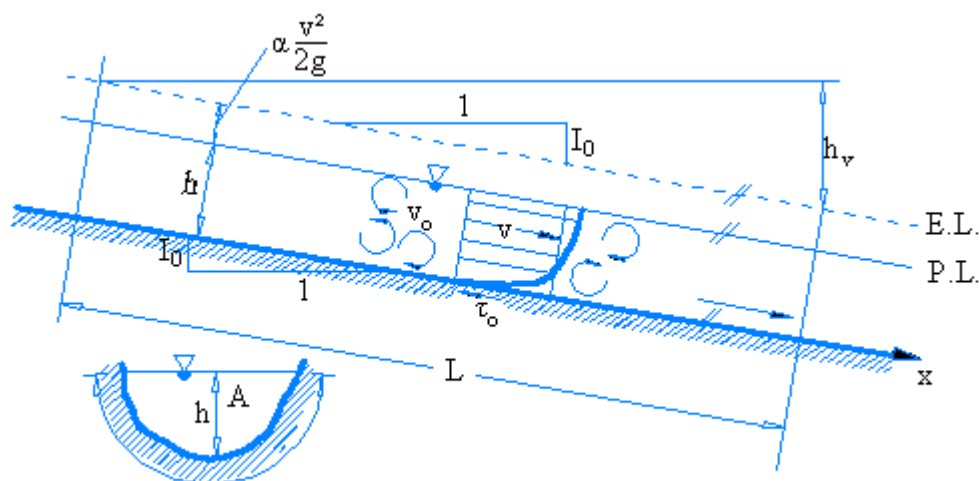
Primarnog praktični interesa je proračun srednjih brzina V i protoka Q u proticajnom profilu jednolike dionici otvorenog korita. Za te potrebe uobičajeno je korištenje Chezy-jeve jednadžbe:

$$V = C \sqrt{R_h I_0} \quad (9.8)$$

gdje je C [$\text{m}^{1/2}/\text{s}$] Chezy-jev koeficijent kojim se parametrizira hrapavost korita, a I_0 nagib dna kanala. U slučaju jednolikog tečenja vrijedi i jednakost nagiba piezometarske linije I_{PL} (linija vodnog lica), energetske linije I_{EL} (slika 9.12). Za definiranje Chezy-jevog koeficijenta hrapavosti u praksi se često kristi Manning-ov koeficijent hrapavosti n a koji je u odnosu na Chezy-jev koeficijent izražen jednakošću:

$$C = \frac{1}{n} \sqrt{R_h} \quad (9.9)$$

Vrijednosti Manning-ovog koeficijenta hrapavosti n definirane za cijeli niz karakterističnih uvjeta korita i moguće ih je pronaći u tablicama svih priručnika koji se bave ovom problematikom.

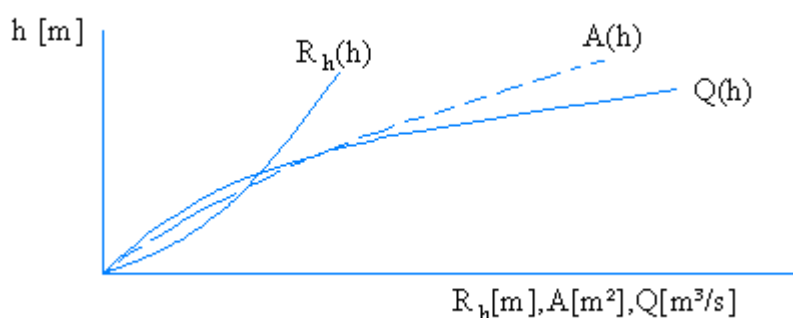


Slika 9.12 – definicijska skica za jednoliko tečenje sa slobodnim vodnim licem (paralelnost piezometarske linije I_{PL} (linija vodnog lica), energetske linije I_{EL} i linije dna kanala I_0).



Slika 9.13 – karakteristične vrijednosti Manning-ovog koeficijenta hrapavosti n (lijevo – grubi betonski kanal $n = 0,02$; sredina – šljunkoviti korito aluvijalnog vodotoka $n = 0,03$; desno – intenzivno zatravnjeni kanal $n = 0,08$ (Chow, 1959)

Upotrebom Chezy-jeve jednadžbe u uvjetima jednolikog i stacionarnog tečenja moguće je odrediti i funkcijski odnos $Q(h) = V(h) A(h)$ koji se u dijagramskom prikazu naziva i konsumpciona krivulja. Primjer konsumpcione krivulje dan je na slici 9.14.



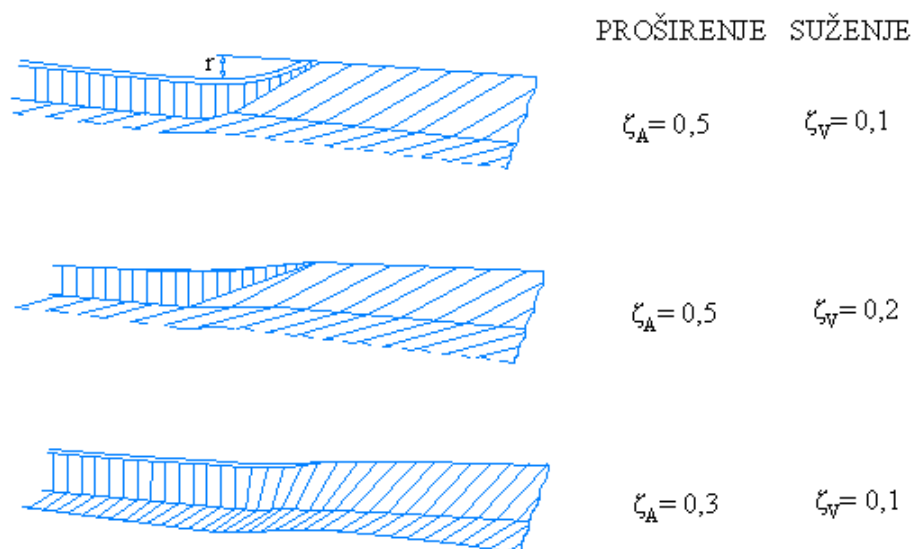
Slika 9.14 – primjer prikaza konsumpcione krivulje za jedan proticajni profil otvorenog vodotoka (jednoliko i stacionarno tečenje)

9.5 Lokalne promjene u geometriji toka pri tečenju sa slobodnim vodnim licem

Kao i u slučaju cjevovoda pod tlakom i u tečenju sa slobodnim vodnim licem često se pojavljuju više ili manje nagle promjene geometrije strujanja kao posljedica u promjenama geometrije proticajnog profila (suženja, proširenja, stepenice itd.). Pojava takvih lokalnih promjena u otvorenim vodotocima također uzrokuje povećano vrtloženje i lokalne gubitke energije koji se vežu sa koeficijentom lokalnog gubitka na kinetičku energiju toka (brzinsku visinu $v^2/2g$):

$$h_v = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (9.10)$$

gdje je V srednja brzina u proticajnom profilu a uobičajeno je da se uzima srednja brzina prije promjene proticajnog profila. U nastavku prikazani primjeri odnose se samo na slučajeve u kojima promjene proticajnog profila ne uzrokuju promjenu režima tečenja (prije promjene mirno tečenje, poslije promjene mirno tečenje). Na slici 9.15 dan je primjer vrijednosti koeficijenata lokalnih gubitaka pri prijelazu iz trapeznog u pravokutni proticajni profil kanala.

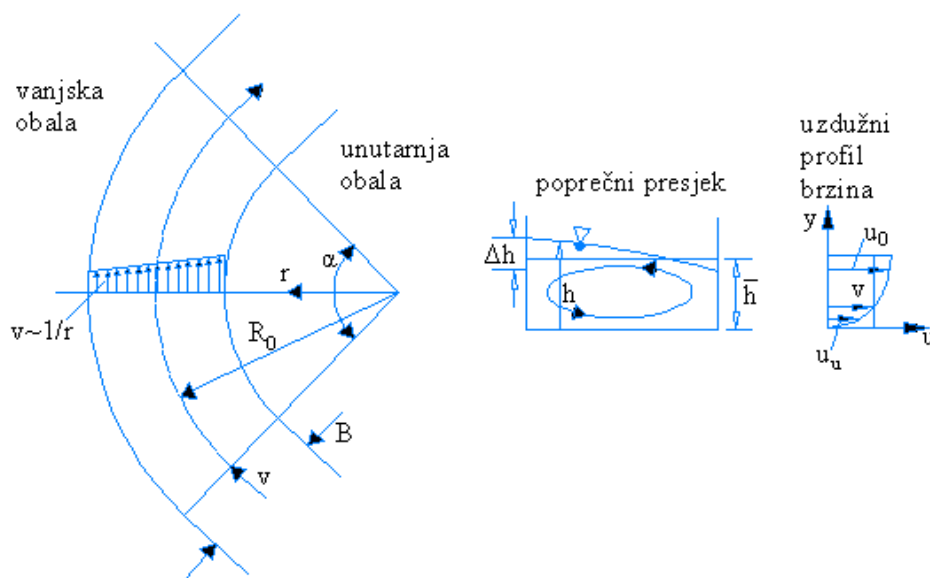


Slika 9.15 - vrijednosti koeficijenata lokalnih gubitaka pri prijelazu iz trapeznog u pravokutni proticajni profil kanala

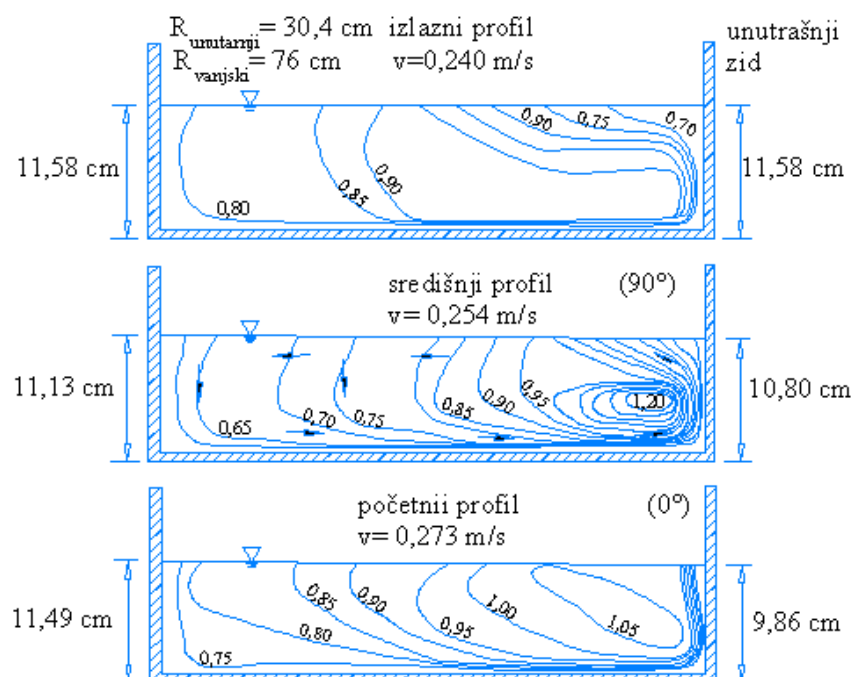
U slučaju pojave krivine te zbog djelovanja centrifugalnog ubrzanja vodno lice se deformira u vidu rasta razina prema vanjskoj obali korita $\Delta h \approx (V^2 B)/(gR_0)$ (slika 9.16). Posljedično se formira i sekundarno spiralno strujanje. Profil brzina u jednom eksperimentalno kanalu sa krivinom od 180° prikazan je na slici 9.17. Lokalni gubici koji se pojavljuju pri mirnom tečenju u kanalima u

dionicama krivina sa središnjim kute većim od 90^0 mogu se izraziti temeljem jednadžbe (Naudascher, 1992):

$$\xi_K 0,5 \left(\frac{R}{B} \right)^{-1} \quad (9.11)$$

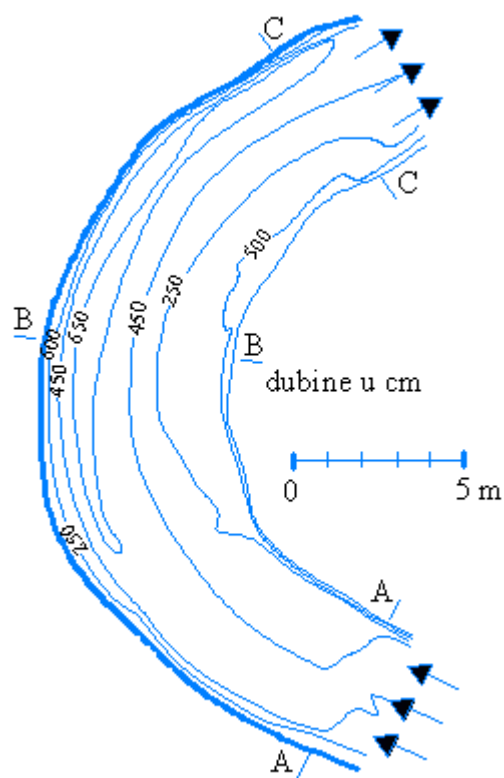


Slika 9.16 – raspodjele brzina i razina u vertikalnom i horizontalnom presjeku u otvorenom vodotoku u krivini



Slika 9.17 - profil brzina u jednom eksperimentalno kanalu sa krivinom od 180^0 (Naudascher, 1992)

Nadalje, u kanalu zbog pojave sekundarnog spiralnog strujanja dolazi do erozije na uzvodnim profilima i do deponiranja na nizvodnim profilima uzduž krivine a što kroz duži vremenski period rezultira i sa pojavom meandriranja prirodnih korita. Na slici 9.18 dan je prikaz morfologije korita u krivini otvorenog vodotoka (veće dubine ukazuju na područja izložena eroziji a manje dubine na područja izložena deponiranju prethodno erodiranog materijala).

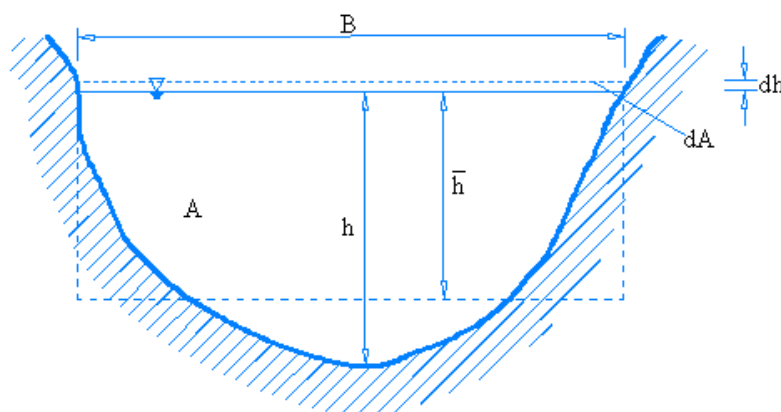


Slika 9.18 - morfologija korita u krivini otvorenog vodotoka (Ikeda, Parker, 1989)

9.6 Specifična energija poprečnog presjeka otvorenog vodotoka

U općem slučaju tečenja sa slobodnim vodnim licem u koritima proizvoljnog (neprizmatičnog) proticajnog presjeka režim tečenja se dijeli na mirno, siloviti o kritično tečenje. Definiranje režima provodi se kroz analizu specifične energije poprečnog presjeka koja je definirana izrazom:

$$E = h + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \quad (9.12)$$



Slika 9.19 – definicijska slika sa bitnim oznakama vezanim uz analizu specifične energije poprečnog presjeka otvorenog vodotoka

Ekstrem funkcije specifične energije poprečnog presjeka E dobiva se upotrebom prve derivacije:

$$\frac{dE}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dh} \quad (9.13)$$

a obzirom da je $dA = Bdh$ (vidi sliku 9.19) ekstrem (minimum) specifične energije poprečnog presjeka dobiti će se ukoliko vrijedni jednakost:

$$\frac{\alpha Q^2}{gA^3} B = 1 \quad (9.14)$$

Izraz 9.14 ujedno predstavlja i definicijski izraz za Froude-ov broj Fr odnosno Fr^2 a koji je u prethodnim poglavljima bio komentiran samo za slučajeve pravokutnih korita u kojima je dubina h bilo koje vertikale proticajnog presjeka bila jednaka srednjoj dubini neprizmatičnog proticajnog presjeka \bar{h} . Prema tome za slučaj proizvoljnog presjeka izraz 9.14 može se pisati i na slijedeći način:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g(A/B)}} = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (9.15)$$

Režim tečenja definiran je na način da se pri vrijednostima $Fr < 1$ govori o *mirnom režimu*, pri $Fr > 1$ o *silovitom režimu* te u slučaju $Fr = 1$ o *kritičnom* tečenju. U slučaju $Fr = 1$ dubine se nazivaju kritičnim dubina h_{kr} a brzine kritičnim brzinama v_{kr} . U nastavku se analizira specifična energija poprečnog presjeka u jednostavnijem slučaju pravokutnog proticajnog profila pa se uvode i odgovarajuće veličine, specifični protok po metru dužnom širine kanala:

$$q = Q/B \quad ; \quad V = q/h \quad (9.16a,b)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu 9.12 daje:

$$E = h + \frac{q^2}{2gh^2} ; \quad h^3 - Eh^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad (9.17a,b)$$

Izraz 9.17b je jednadžba 3. reda za dubinu h koja se može predstaviti i kao funkcional:

$$h = f(E, q) \quad (9.18)$$

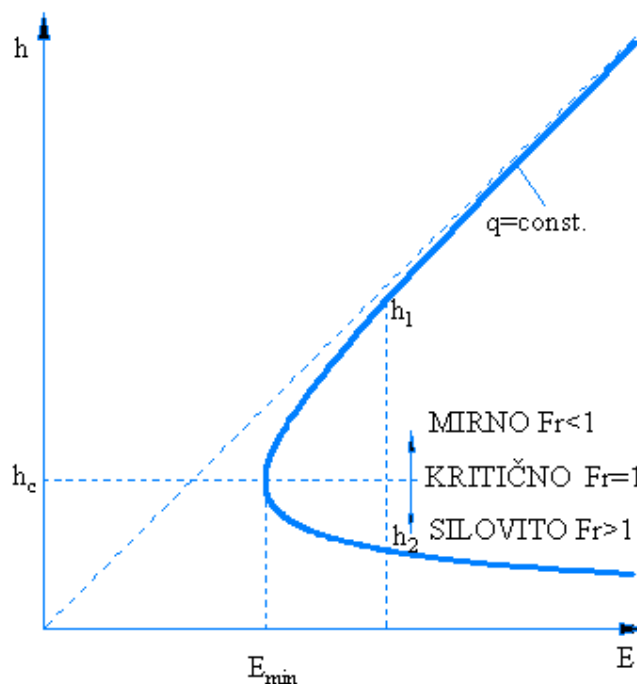
Dakle lokalna dubina h je funkcional lokalne specifične energije E i specifičnog protoka q . U slučaju fiksiranja vrijednosti specifičnog protoka $q = \text{konst.}$ i specifične energije E jednadžba 9.18 daje dva moguća rješenja dubina h_1 i h_2 . (slika 9.20). Smanjenjem specifične energije te dvije dubine se približavaju te pri ostvarenju minimuma $E = E_{\min}$ postoji samo jedna dubina i to kritična dubina h_{kr} pri kojoj je $Fr^2 = Fr = 1$. Iz spomenutog uvjeta kritična dubina h_{kr} za pravokutni kanal može se dobiti i eksplicitno:

$$h_c = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (9.19)$$

a usvajanjem srednjih brzina (kritičnih brzina) pri kritičnoj dubini $V_{kr} = q/h_{kr}$ dobiva se minimum specifične energije:

$$E_{\min} = h + \frac{1}{2}h_c = \frac{3}{2}h_c \quad (9.29)$$

Dakle u uvjetima kritičnog tečenja dvije trećine specifične energije sačinjeno je od potencijalne energije a jedna trećina od kinetičke energije.

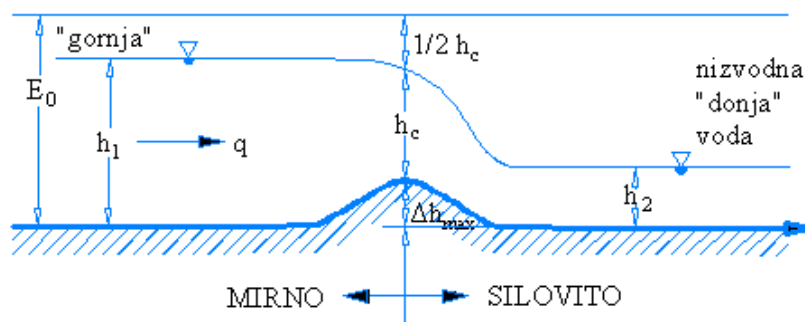


Slika 9.20 – dijagram specifične energije poprečnog presjeka (dubina h je funkcija specifične energije poprečnog presjeka E pri konstantnom specifičnom protoku q)

Kako se sa slike 9.20 može uočiti pri dubinama $h > h_{kr}$ ($Fr < 1$) tečenje je mirno a pri dubinama $h < h_{kr}$ ($Fr > 1$) tečenje je silovito. Sa dijagrama na slici 9.20 važno je uočiti da se kontinuirana krivulja $h=f(E, q=\text{konst.})$ dobiva pri varijaciji nagiba dna kanala. Pri malim nagibima dna kanala intuitivno je prihvatljivo da će dubine biti relativno velike ($h > h_{kr}$, $Fr < 1$) a kinetička energija relativno mala. Povećanjem nagiba pri istom specifičnom protoku ($q=\text{konst.}$) dubina se smanjuje a kinetička energija povećava čime se približavamo uvjetima kritičnog tečenja. Pri određenom nagibu I_{kr} (kritični nagib) pojavljuje se kritična dubina h_{kr} i kritična brzina V_{kr} . Daljnjim povećanjem nagiba dna kanala nastavlja se smanjenje dubine ($h > h_{kr}$, $Fr > 1$) i povećanje kinetičke energije.

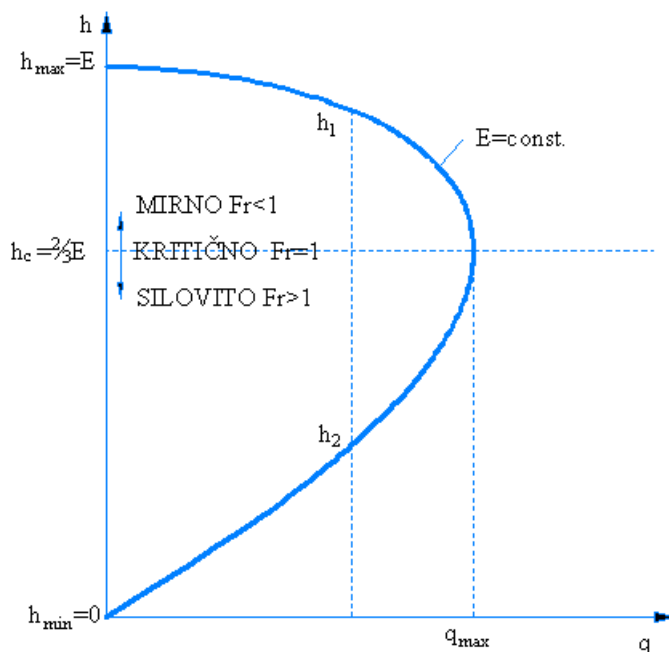
Prethodna analiza upućuje na bitan zaključak da je minimalna specifična energija E potrebna za „transport“ proizvoljnog protoka q kroz proticajni presjek vezana uz kritičnu dubinu, odnosno da za bilo koju raspoloživu specifičnu energiju presjeka E postoji i odgovarajući maksimalni protok q_{max} koji se može transportirati u uvjetima kritičnog tečenja (h_{kr} i V_{kr}). Upravo iz tih razloga prirodni tokovi svladavaju „prepreke“ poput preljeva i visokih pragova na „štedljivi“ način u kojem se uz najviše kote „prepreka“ pojavljuju uvjeti kritičnog tečenja sa kritičnim dubinama (slika 9.22). Na slici 9.21 prikazan je primjer preljevanja preko tzv. širokog praga. Gubici energije na širokom pragu se mogu usvojiti kao zanemarivi kao i linijski gubici zbog relativno kratke dionice koja se promatra

a što rezultira sa horizontalnom energetskom linijom. Tečenja prije širokog je mirno, na širokom pragu je kritično a na nizvodnoj dionici režim tečenja ovisi o nizvodnom nagibu dna kanala te može biti miran ($I_0 < I_{krit}$; $h > h_{kr}$, $Fr < 1$) ili silovit ($I_0 > I_{krit}$; $h < h_{kr}$, $Fr > 1$).



Slika 9.21 - prelijevanje preko širokog praga

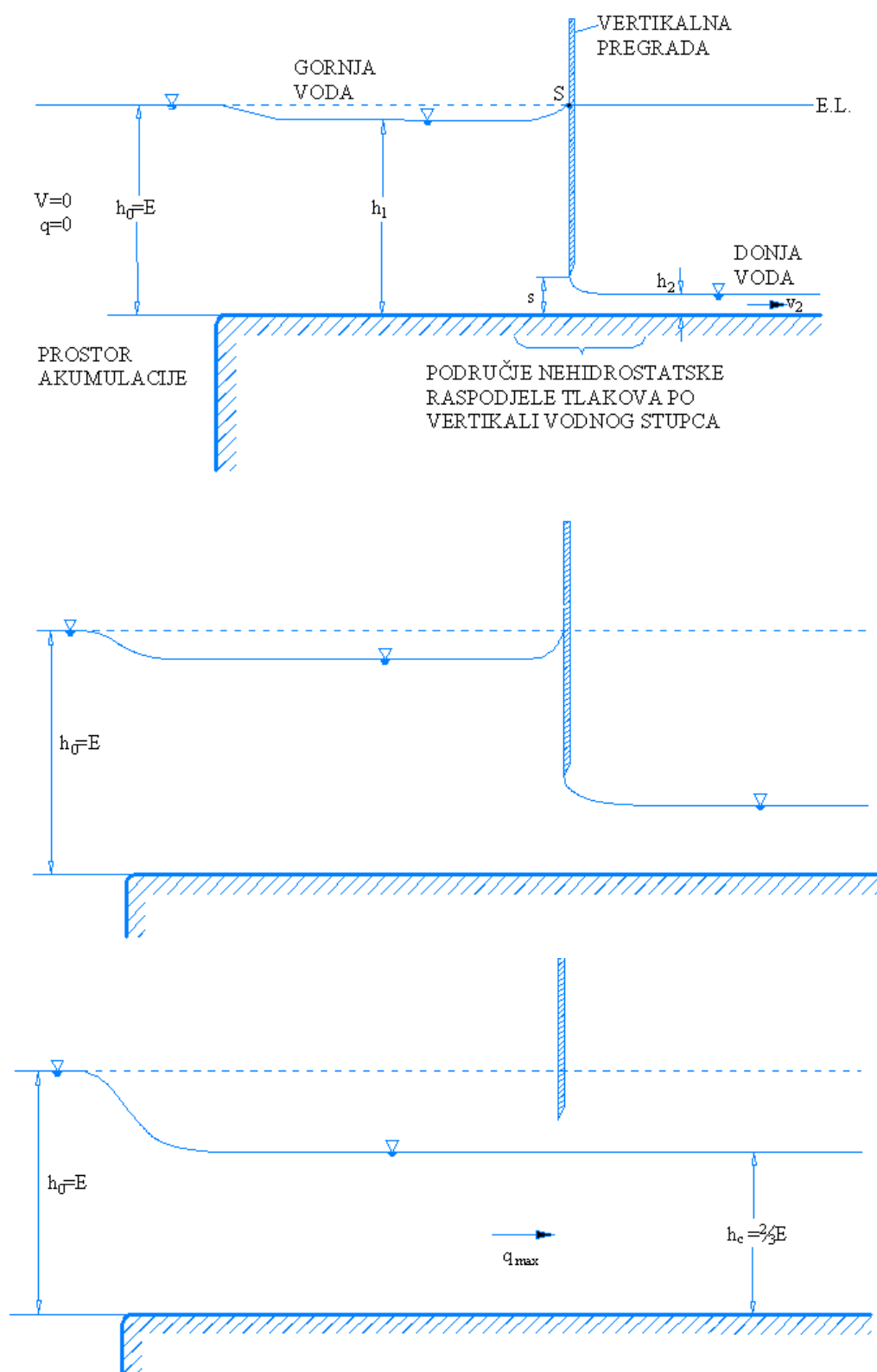
Uz izmijenjene uvjete analize $E = \text{konst.}$ dubina h postaje funkcija specifičnog protoka q te se dobiva dijagram $h = f(q, E = \text{konst.})$ prikazan na slici 9.22. Pri određenom specifičnom protoku q moguća je pojava dvije dubine od kojih je jedna veća (mirno tečenje) a jedna manja (silovito) od kritične dubine. Maksimalna dubina h_{max} pojavljuje se u slučaju sa $V = q = 0$ dok je tečenje pri dubini h_{min} karakterizirano sa vrlo velikim brzinama. Maksimalni specifični protok postiže se pri uvjetima kritičnog tečenja ($h = h_{kr}$).



Slika 9.22 – dijagram funkcijske ovisnosti dubina h o specifičnom protoku q pri konstantnoj specifičnoj energije poprečnog presjeka E

U nastavku se daje i par praktičnih primjena provedbe analize specifične energije u uvjetima stacionarnog tečenja i uz pretpostavku zanemarenja linijskih i lokalnih gubitaka.

Na slici 9.23 prikazano je istjecanje ispod pregrade u kanalu jednolike širine B koji je povezan sa velikim akumulacijskim prostorom u kojem zbog velikog volumnog sadržaja tekućine neće doći do smanjenja razine vodnog lica tijekom vremena.



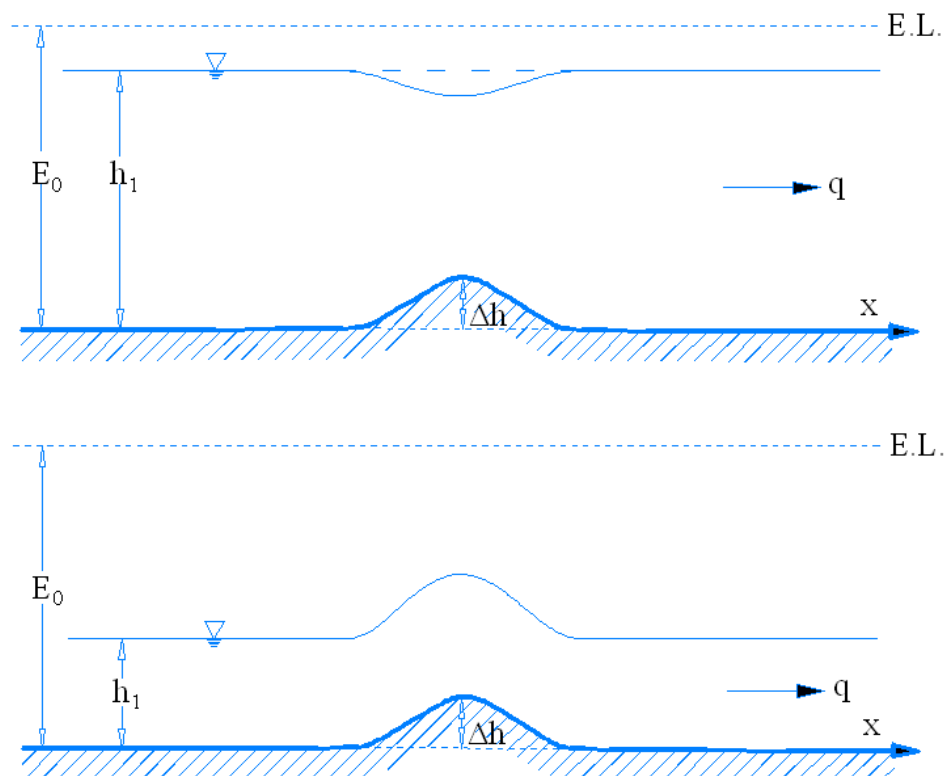
Slika 9.23 - istjecanje ispod pregrade u kanalu jednolike širine B koji je povezan sa velikim akumulacijskim prostorom

Nakon podizanja pregrade prije pregrade pojavljuje se mirni režim a nizvodno od pregrade (zona istjecanja) siloviti režim tečenja. Dubine u kanalu prije i poslije pregrade prema tome predstavljaju par h_1 i h_2 pri istom specifičnom protoku q i pri istoj specifičnoj energiji E (slike 9.22 i 9.23a). Nakon podizanje pregrade povećava se specifični protok q (protok istjecanja) a vrijednosti dubina h_1 i h_2 se približavaju (slike 9.22 i 9.23b). Daljnjim podizanjem pregrade iznad kritične dubine h_{kr} pojavljuje se maksimalni mogući specifični protok q_{max} (maksimalno istjecanje) za definiranu raspoloživu specifičnu energiju E (slike 9.22 i 9.23c).

Na slici 9.24 prikazano je tečenje preko pridnenog grebena relativno male visine Δh i takve forme da se iza njega ne pojavljuje odvajanje graničnog sloja i pojava lokalnog gubitka uzrokovanog intenzivnim vrtloženjem. Na gornjoj slici prikazana je denivelacija vodnog lica iznad grebena u slučaju mirnog tečenja ($h_{11}, h_{21} > h_{kr}$) a na slici ispod u slučaju silovitog tečenja ($h_{21}, h_{22} < h_{kr}$). Ukoliko bi se povećavala visina grebena Δh dubine h_{21} i h_{22} približavale bi se jedna drugoj bez promjene uzvodnih dubina h_{11}, h_{12} i specifične energije E_0 . Prema tome postoji i Δh_{max} pri kojemu dubine h_{21} i h_{22} poprimaju jednu te istu vrijednost (kritična dubina $h_{21} = h_{22} = h_{kr}$) a da još uvijek nema promjene uzvodne specifične energije E_0 . Prekoračenje visine grebena $\Delta h > h_{max}$ uzrokuje povećanje uzvodnih dubina h_{11}, h_{12} i specifične energije E_0 no ne i promjenu dubina iznad grebena $h_{21} = h_{22} = h_{kr}$. Bez obzira koliko se nadalje poveća visina grebena Δh prelijevanje iznad njega biti će karakterizirano sa jednom te istom dubinom i to kritičnom dubinom $h_{21} = h_{22} = h_{kr}$. Također se napominje i činjenica da će se pri $\Delta h > h_{max}$, u slučaju inicijalno silovitog tečenja (doljnja slika), desiti i tranzicija iz silovitog u mirno tečenje na određenoj udaljenosti uzvodno od samog grebena. Taj tranzicijski fenomen iz silovitog u mirno tečenje naziva se vodni skok a o kojem će se dati detaljnija objašnjenja u poglavljima koja slijede.

Primjena dijagrama specifične energije moguća je i u analizi lokalnih promjena geometrije korita u smislu lokalnog proširenja ili suženja te stepenica kojima se lokalno produbljuje ili uzvisuje kota kanala. I u ovim slučajevima pretpostavlja se da lokalne promjene geometrije ne uzrokuju značajnije lokalne gubitke. U tablici 9.1 definirani su oblici promjena razine vodnog lica pri pojavi lokalnih promjena geometrije korita. Primjerice, u kanalu u kojem se pojavljuje samo lokalno suženje u smjeru toka dubina vode će pasti u nizvodnoj suženoj dionici ukoliko je i u široj i u užoj dionici kanala prisutan mirni režim tečenja. U slučaju silovitog toka kroz uzvodno širu i nizvodno užu dionicu kanala desiti će se upravo obratno, odnosno doći će do povećanja dubina u nizvodnoj užoj (suženoj) dionici. Analogno tome, u slučaju mirnog toka kroz kanal konstantne širine, pri pojavi kontinuiranog povećanja kote dna kanala smanjiti će se dubina u nizvodnoj dionici sa

povećanom kotom dna kanala. Kao i u prethodnom slučaju pri silovitom tečenju dešava se obratna situacija (povećanje dubine u nizvodnoj dionici sa povećanom kotom dna kanala).



Slika 9.24 - tečenje preko pridnenog grebena relativno male visine Δh

	MIRNO ($Fr < 1$)	SILOVITO ($Fr > 1$)
Uzdizanje dna $dz/dx > 0$	$dh/dx < 0$	$dh/dx > 0$
Spuštanje dna $dz/dx < 0$	$dh/dx > 0$	$dh/dx < 0$
Proširenje $dB/dx > 0$	$dh/dx > 0$	$dh/dx < 0$
Suženje $dB/dx < 0$	$dh/dx < 0$	$dh/dx > 0$

Tablica 9.1 – Promjene dubina dh/dx u prizmatičnom kanalu sa varijacijom geometrija korita (dz/dx – promjena kote dna ; dB/dx – promjena širine kanala)

9.7 Preljevanje i istjecanje u kanalima otvorenih vodotoka

Kontrola odnosno manipulacija sa proticajnim ili istjecajnim količinama u kanalima ostvaruje se putem hidrotehničkih građevina-elemenata koji uzrokuju značajne promjene u samoj geometriji toka.

Pedagoški primjer koji u modernoj hidrotehničkoj praksi nema značajniju primjenu ali je pogodan za teoretske izvode je osnovni tip preljeva koji se naziva oštrobriđni široki preljev. Preljev visine P je postavljen u kanal širine B u kojem voda pristrujava u mirnom režimu sa brzinom V_0 uz

specifičnu energiju E_0 i dubinu h_0 (slika 9.25). Energetski gubici se zanemaruju. Iznad najviše kote preljeva pojavljuje se kritična dubina h_{kr} koja iznosi:

$$h_{kr} = \frac{2}{3} E_S = \frac{2}{3} (E_0 - P) = \frac{2}{3} \left(h_p + \frac{V_0^2}{2g} \right) \quad (9.30)$$

gdje se oznaka h_p odnosi na visinu prelijevanja definiranu vertikalnom udaljenošću između najviše kote preljeva i razine vodnog lica na uzvodnoj udaljenosti od preljeva na kojoj se više ne osjeća utjecaj preljeva (slika 9.25). Obzirom na formirano kritično tečenje iznad samog preljeva protok se izračunava upotrebom jednadžbe:

$$Q = qB = \sqrt{gh_{kr}^3} B = \sqrt{g} \left[\frac{2}{3} \left(h_p + \frac{V_0^2}{2g} \right) \right]^{3/2} B \quad (9.31)$$

Koja daljnjim sređivanjem prelazi u izraz:

$$Q = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{V_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right] \sqrt{2g} h_p^{3/2} B \quad \rightarrow \quad Q = C_Q \sqrt{2g} h_p^{3/2} B \quad (9.32a,b)$$

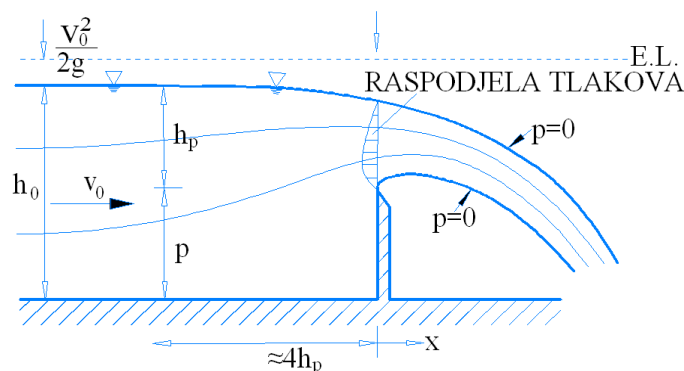
Dio izraza u uglatoj zagradi skraćeno se zamjenjuje oznakom C_Q i naziva se koeficijentom prelijevanja i predstavlja bezdimenzionalnu veličinu. Za slučaj vrlo visokog preljeva za koji vrijedi $h_p/P \rightarrow 0$ te $V_0 \rightarrow 0$ dobiva se slijedeća jednakost:

$$C_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} = 0,385 \quad (9.33)$$

Forma izraza 9.32b koristi se i za ostale vrste preljeva s naznakom da se koeficijenti preljeva C_Q dobivaju temeljem eksperimentalnih analiza zbog većeg broja utjecajnih parametara prisutnih u općenitijem slučaju geometrije samog preljeva. U općem slučaju preljeva koeficijent preljeva C_Q u ovisnosti je od slijedećih parametara:

$$C_Q = f \left(\frac{h_p}{P}, Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}}, \text{forma, hrapavost, } Re = \frac{V_0 h_0}{\nu}, We = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho} h_p}} \right) \quad (9.34)$$

Bezdimenzionalni parametri Reynolds-ov broj Re i Weber-ov broj We imaju značajniji utjecaj samo kod vrlo malih preljeva koji se izvode u laboratorijskom mjerilu dok pri prelijevanju u mjerilu prirodnih objekata imaju zanemarivo značenje.



Slika 9.25 – shematski prikaz oštrobridnog širokog preljeva visine P postavljenog u kanal širine B u kojem voda pristrujava u mirnom režimu sa brzinom V_0 pri specifičnoj energiji E_0 i dubini h_0

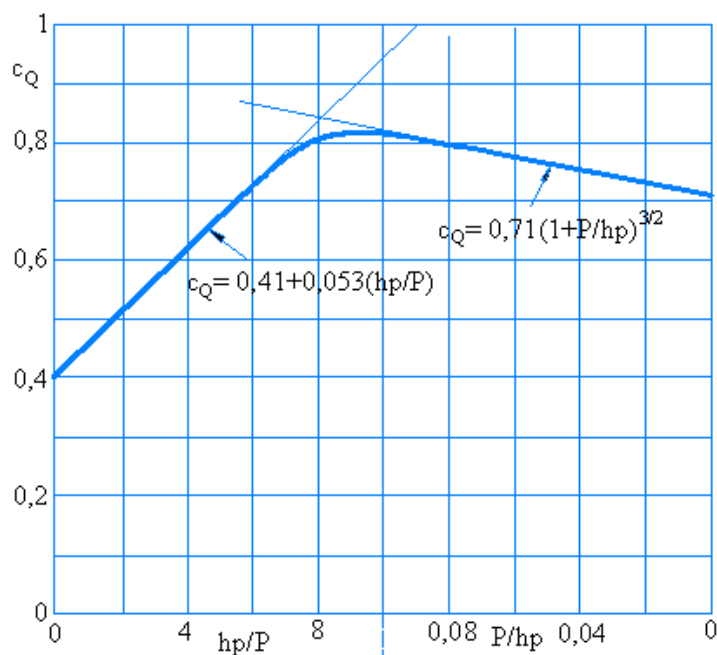
U realnom slučaju preljev ima konačnu širinu koja preljevni tok bočno kontrahira zbog čaga se vrijednost koeficijenta prelijevanja treba odrediti eksperimentalno. Prema eksperimentalnim istraživanjima Rehbock (1945) koeficijent prelijevanja može se proračunati izrazom:

$$C_Q = 0,41 + 0,053 \frac{h_p}{P} \quad \text{za} \quad \frac{h_p}{P} < 6 \quad (9.35)$$

Dok se za slučaj preljeva sa vrlo malim visinama P u praksi pokazala bolja jednadžba dobivena temeljem eksperimentalnih istraživanja provedenih od strane Boss (1965):

$$C_Q = 0,71 \left(1 + \frac{P}{h_p} \right)^{3/2} \quad \text{za} \quad \frac{P}{h_p} < 0,06 \quad (9.36)$$

Na slici 9.26 dan je prikaz kontinuirane krivulje $C_Q = f(h_p/P)$ kojom je pokriveno područje primjene jednadžbe 9.35 (lijeva strana dijagrama) i jednadžbe 9.36 (desna strana dijagrama) te prelazno područjem (sredina dijagrama).



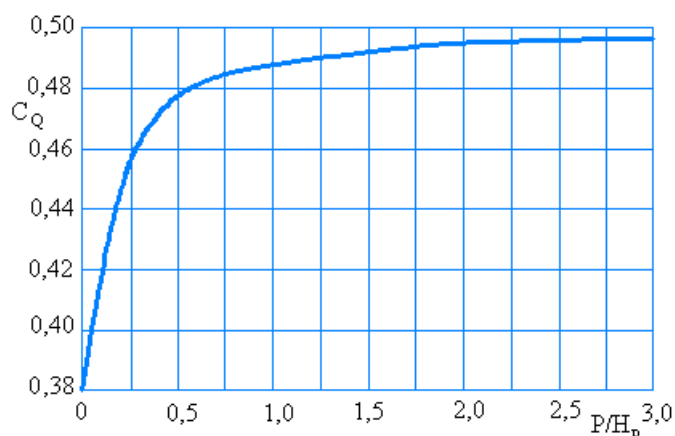
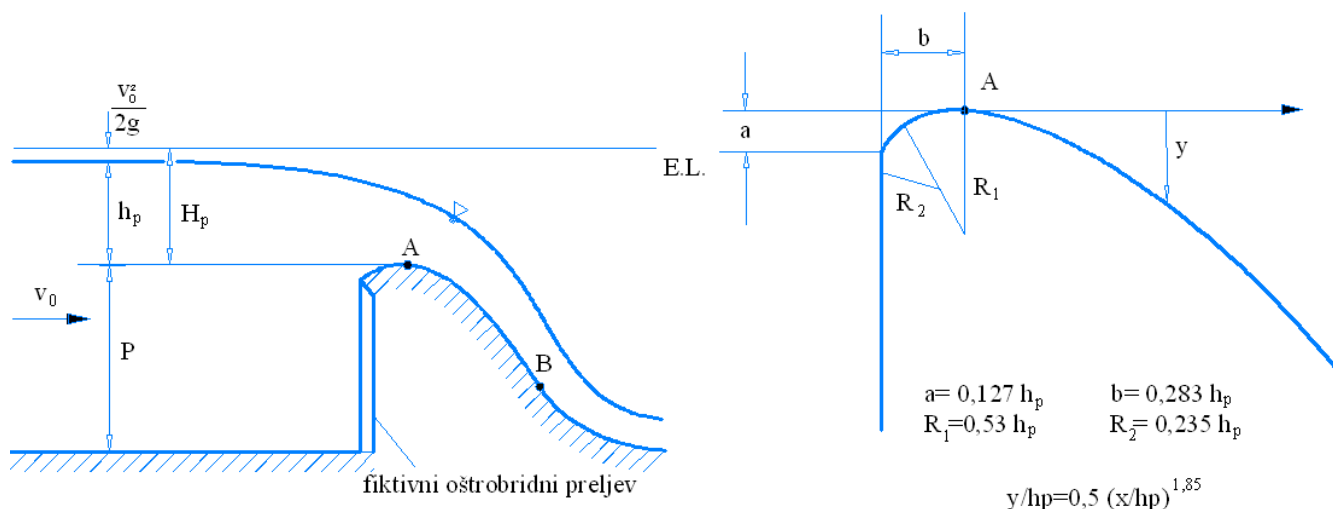
Slika 9.26 - kontinuirane krivulja $C_Q = f(h_p/P)$ kojom je pokriveno područje primjene jednadžbe 9.35 (lijeva strana dijagrama – relativno visoki preljevi) i jednadžbe 9.36 (desna strana dijagrama – preljevi malih visina) te prelazno područjem (sredina dijagrama)

U praksi je puno češći primjer primjene preljeva sa zaobljenom krunom koji se nazivaju i preljevima praktičnog profila (slika 9.27). Kontura dna preljeva izvedena je na način da se ispuni područje ispod doljnja strujnica preljevnog mlaza koji bi se pojavio u prelijevanju preko oštrobridnog preljeva. Za razliku od slučaja oštrobridnog preljeva, u jednadžbi za proračun prelijevanja preko preljeva praktičnog profila u obzir se uzima i utjecaj kinetičke energije toka uzvodno od preljeva:

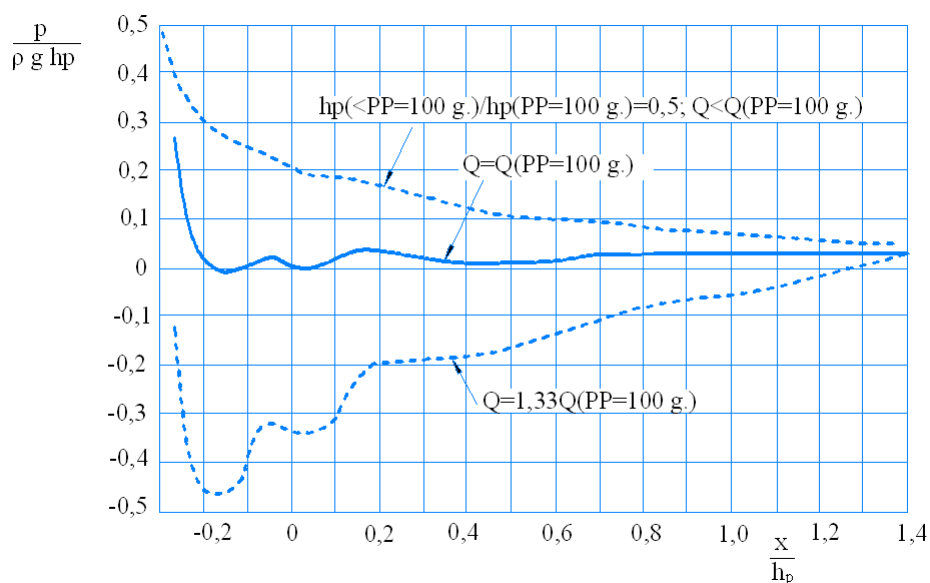
$$H_p = h_p + \frac{V_0^2}{2g} \quad \rightarrow \quad Q = C_Q \sqrt{2g} H_p^{3/2} B \quad (9.37)$$

Obzirom da se za svaki određeni preljevni protok pojavljuje druga geometrija strujnice potrebno je definirati onaj preljevni protok koji je on najvećeg značaja i koji će se najvjerojatnije i najučestalije pojavljivati tijekom eksploatacijskog vijeka preljevne građevine. Ukoliko preljev ima svrhu tzv. evakuacijskog organa kojim se evakuiraju vode iz akumulacijskih prostora za vrijeme velikih dotoka u akumulaciju, kontura dna preljeva se primjerice projektira prema doljnoj strujnici preljevnog protoka povratnog perioda od 100 godina. U situacijama u kojima su preljevni protoci veći od tog protoka pojaviti će se odvajanje strujnice od konture dna preljeva te će doći do pojave podtlaka između preljevnog mlaza i konture dna. S pojavom podtlaka pojavljuje se i u određenoj mjeri željeno povećanje koeficijenta prelijevanja zbog pojave „sisanja“ preljevnog mlaza. U slučaju pojave svih protoka manjih od projektiranog, kontura dna prelijevanja biti će izložena djelovanju

tlakova većih od atmosferskih (slika 9.28) što kao posljedicu ima i smanjenje koeficijenta prelijevanja. Naravno, pri pojavi upravo projektnih protoka prelijevanja, kontura dna trebala bi biti izložena tlakovima koji su vrlo bliski atmosferskom tlaku (slika 9.28).



Slika 9.27 - geometrijska obilježja krune preljeva praktičnog profila uz dijagramski prikaz vrijednosti koeficijenta prelijevanja C_D (Robertson, 1998)



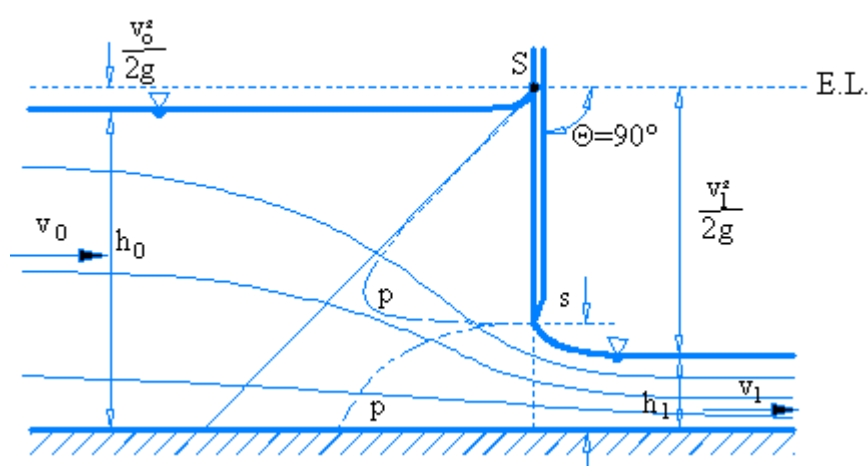
Slika 9.28 – raspodjela tlakova uzduž konture dna preljeva za slučajeve projektnog prelijevnog protoka te za protoke veće i manje od njega (Chow, 1959)

Jedna vertikalna pregrada odignuta na visinu s od dna (slika 9.29) predstavlja kontrolni organ istjecanja koji uobičajeno uzrokuje tranziciju iz uzvodno mirnog u silovito tečenje neposredno iza pregrade. Na dovoljnoj uzvodnoj udaljenosti od profila pregrade strujnice su paralelne a raspodjela tlakova po vertikali (dubine h_0) vodnog stupca je hidrostatska. U proticajnom profilu same pregrade strujanje je izrazito nejednoliko a strujnice nisu paralelne. Međutim na određenoj relativnoj bliskoj nizvodnoj udaljenosti od pregrade ponovno se uspostavlja proticajni profil u kome su strujnice paralelne. Taj profil naziva se kontrahirani proticajni presjek a vrijednost dubine h_1 kontrahirana dubina. Odnos između visine odizanja pregrade s i kontrahirane dubine h_1 je izražen preko eksperimentalno dobivenog koeficijenta kontrakcije C_C u vidu jednostavnog izraza $h_1 = C_C s$. Ukoliko se promatra istjecanje ispod pregrade u kanalu jednolike širine B površina kontrahiranog presjeka je $A_1 = C_C s B$ a jednačba kontinuiteta daje jednakost $Q_0 = B h_0 V_0 = Q_1 = B C_C s V_1$. Uz pretpostavku odsustva energetske gubitaka, specifična energija je jednaka u oba presjeka $E_0 = E_1$ odnosno:

$$h_0 + \frac{V_0^2}{2g} = C_C s + \frac{V_1^2}{2g} \quad \rightarrow \quad V_1 = \sqrt{2g(h_0 - C_C s) + \frac{V_0^2}{2g}} \quad (9.38a,b)$$

što u slučaju kanala širine B daje slijedeću jednačbu za proračun protoka istjecanja ispod pregrade:

$$Q = C_C \sqrt{1 - C_C \frac{s}{h_0}} \sqrt{2gh_0} s B \quad (9.39)$$



Slika 9.29. - tečenje uzvodno i nizvodno od profila vertikalne pregrade odignuta na visinu s od dna sa ucrtanim dijagramima tlakova po konturi pregrade i prikazom karakterističnih strujnica

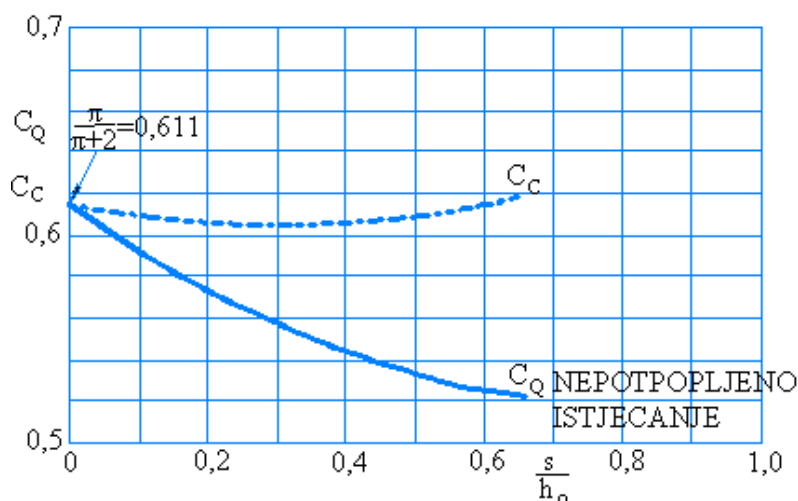
Prva dva člana desne strane u jednačbi 9.39 sažimaju se u tzv. koeficijent istjecanja ispod vertikalne pregrade čime se dobiva pojednostavljeni izraz za protok ispod vertikalne pregrade:

$$Q = C_Q \sqrt{2gh_0} sB \quad (9.40)$$

U općem slučaju izvedbe vertikalne pregrade koeficijent istjecanja je u funkciji većeg broja parametara:

$$C_Q = f\left(\frac{s}{h_0}, Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}}, \text{forma, nagib dna, } q, Re, We\right) \quad (9.41)$$

U najjednostavnijem slučaju horizontalnog dna te visoke pregrade $s/h_0 \rightarrow 0$; $Fr_0 \rightarrow 0$ vrijednost koeficijenta istjecanja je $C_Q = 0,611$ (Kirchoff, 1870). Na slici 9.30 prikazane su krivulje kojima su definirani odnosi između bezdimenzionalnog parametra s/h_0 i koeficijenta istjecanja C_Q odnosno koeficijenta kontrakcije C_c u uvjetima nepotopljenog istjecanja.

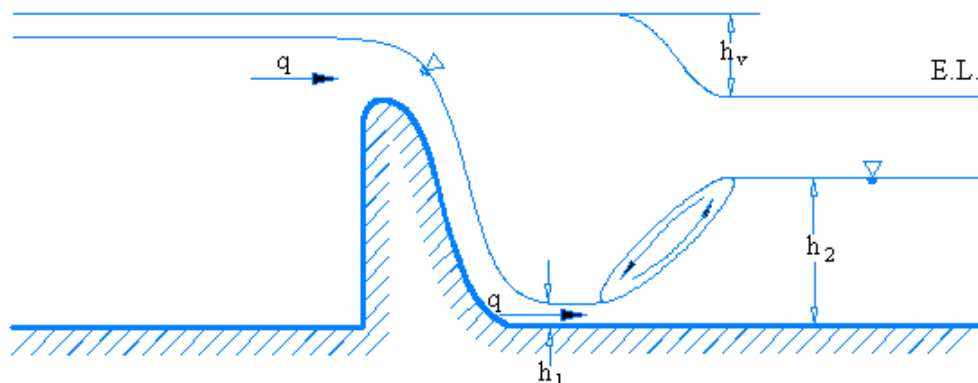


Slika 9.30 – prikaz odnosa između bezdimenzionalnog parametra s/h_0 , koeficijenta istjecanja C_Q i koeficijenta kontrakcije C_c u uvjetima nepotopljenog istjecanja (dobiven eksperimentalno)

9.8 Vodni skok u otvorenim vodotocima

Ovisno o nizvodnim uvjetima nagiba dna kanala nakon vertikalne pregrade ili preljeva, tečenje će se odvijati u mirnom ili silovitom režimu. U slučaju kada je nizvodno dno kanala horizontalno ($I_0 \ll I_{krit}$), kao što je to prikazano na slikama 9.29 i 9.30, sila otpora trenja uzduž omočenih kontura kanala veća je od komponente sile gravitacije koja djeluje u smjeru tečenja pa nastupa usporavanje toka i povećanje dubina. To smanjenje brzina i povećanje dubina dešava se relativno naglo kroz

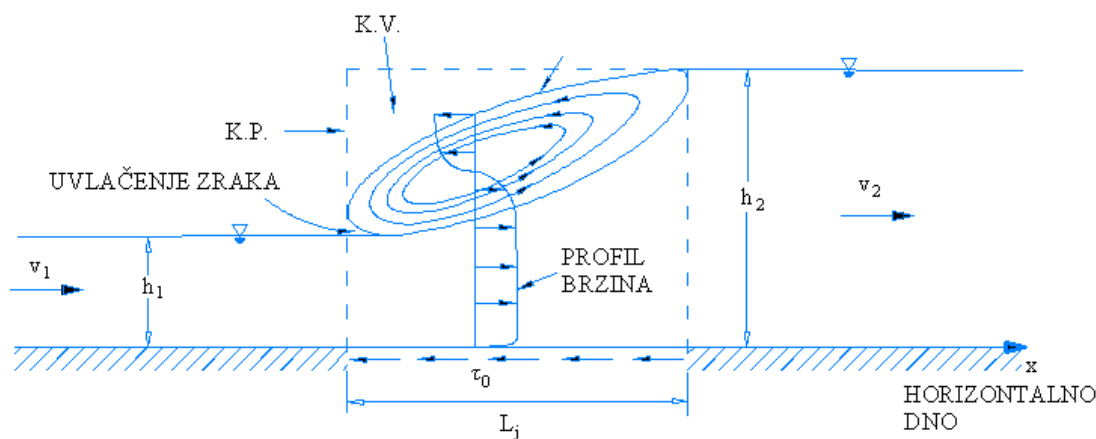
tranzicijski fenomen zvan *vodni skok* a koji je povezan sa visokim stupnjem disipacije mehaničke energije toka h_v (slika 9.31).



Slika 9.31 – primjer pojave vodnog skoka iza preljeva

Obzirom na gubitak energije toka koncept specifične energije nije moguće primijeniti budući da energetske gubitke u vodnom skoku nisu apriori poznati. No, moguća je primjena zakona o očuvanju količine gibanja na kontrolnom volumenu u kojem je sadržan vodni skok (slika 9.32).

$$\rho g \frac{h_1^2}{2} - \rho g \frac{h_2^2}{2} - \overline{\tau}_0 L_j = \rho q (V_2 - V_1) \quad (9.42)$$



Slika 9.32 – kontrolni volumen za analizu vodnog skoka u kanalu konstantne širine i horizontalnog dna

Oznaka h_1 odnosi se na tzv. *prvu spregnutu dubinu* koja u prethodno spomenutoj analizi istjecanja ispod vertikalne pregrade odgovara dubini h_1 u kontrahiranom poprečnom presjeku. Oznaka $\overline{\tau}_0$ odnosi se na osrednjeno posmično naprezanje na dnu na duljini vodnog skoka L_j . Obzirom da je duljina vodnog skoka relativno mala otpori (τL_j) su zanemarivi naspram hidrostatskog tlaka koji djeluju u ulaznom i izlaznom presjeku kontrolnog volumena. Uvođenjem jednadžbe kontinuiteta

$q = V_1 h_1 = V_2 h_2$ u jednadžbu 9.42 dobiva se jednadžba vodnog skoka kojom je definiran međusoban odnos spregnutih dubina h_1 i h_2 :

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right) \quad ; \quad h_1 = \frac{h_2}{2} \left(\sqrt{1 + 8Fr_2^2} - 1 \right) \quad (9.43)$$

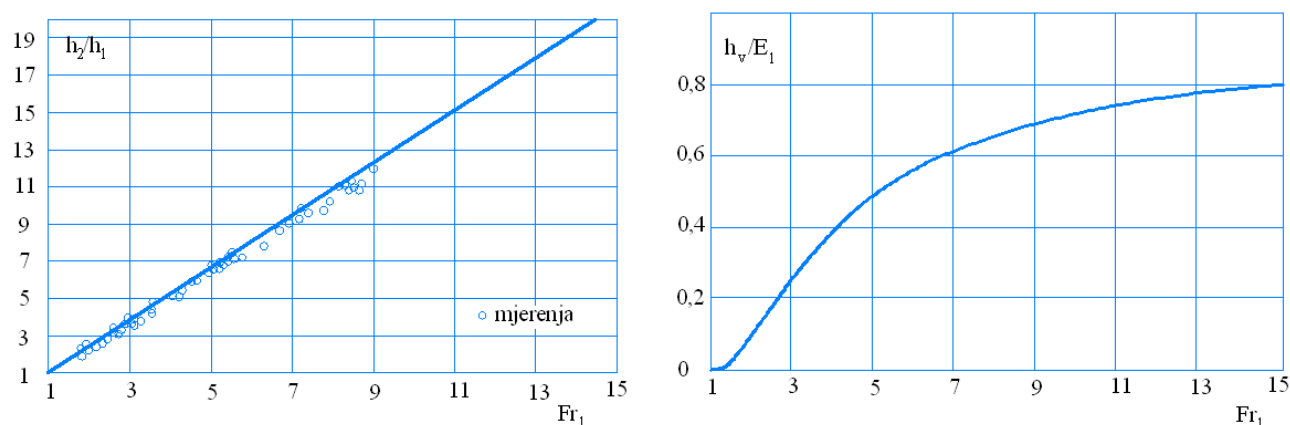
gdje je Fr_1 Froude-ov broj u profilu prve spregnute dubine h_1 izražen jednadžbom:

$$Fr_1 = \frac{q}{\sqrt{gh_1^3}} > 1 \quad (9.44)$$

Nakon dobivanja druge spregnute dubine h_2 iz jednadžbe 9.43 te brzine V_2 iz jednadžbe kontinuiteta moguće je definirati i vrijednost gubitka energije (disipacije) u vodnom skoku:

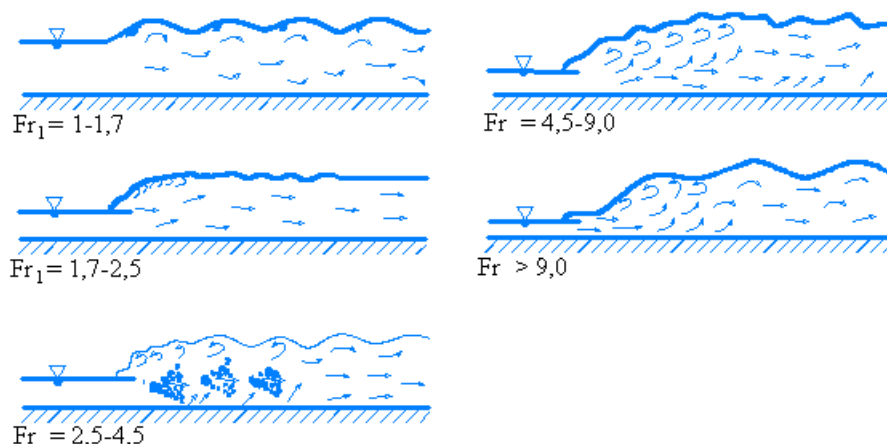
$$h_v = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} \quad (9.45)$$

Na slici 9.33 dan je prikaz rezultata eksperimentalnih istraživanja iz kojih se može uočiti da povećanje silovitosti tečenja (povećanje Fr_1) na području prve spregnute dubine uzrokuje i povećanje omjera druge i prve spregnute dubine h_2 / h_1 . Isto tako povećanje Fr_1 uzrokuje i povećanje energetske disipacije izražene u relativnom odnosu h_v / E_1 .



Slika 9.33 - prikaz rezultata eksperimentalnih istraživanja odnosa Fr_1 i h_2/h_1 odnosno Fr_1 i h_v/E_1

Na slici 9.34 prikazane su i karakteristične forme vodnog skoka u ovisnosti o Fr_1 .



Slika 9.34 - karakteristične forme vodnog skoka u ovisnosti o Fr_1 (Chow, 1959)

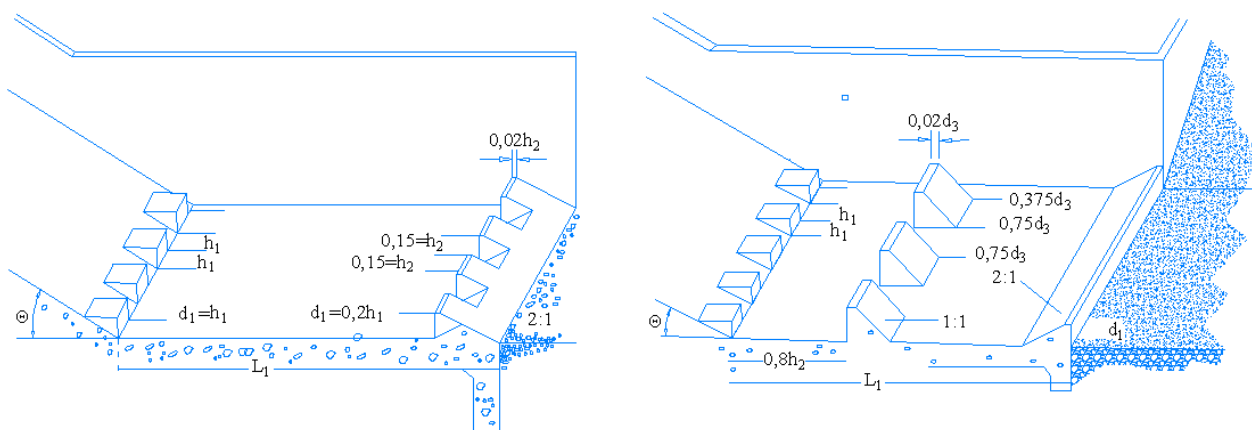
Duljine vodnog skoka L_j nije jednostavno analizirati analitičkim putem zbog čega su provedena eksperimentalna istraživanja a rezultati istraživanja pokazala su da se duljina vodnog skoka L_j približno može odrediti iz druge spregnute duljine h_2 na način:

$$\frac{L_j}{h_2} \approx 6,1 \quad (9.46)$$

Disipacija energije u vodnom skoku je uzročnik značajnog smanjenja brzina i povećanja dubina u nizvodnim dionici vodotoka a što je vrlo poželjno u smislu stabilizacije nizvodnog korita. Međutim, ukoliko su uvjeti nizvodne dionice vodotoka takvi da je normalna dubina (dubina koja se pojavljuje u uvjetima jednolikog i stacionarnog tečenja) manja od druge spregnute dubine vodnog skoka h_2 doći će do pojave tzv. *odbačenog vodnog skoka* koji propagira nizvodno. Pomicanjem tijela vodnog skoka nizvodno, u cijelom uzvodnom području prije vodnog skoka zadržavaju se velike brzine (siloviti režim tečenja). Te velike brzine ugrožavaju stabilnost korita. Zbog toga je potrebno osigurati da se vodni skok pojavi ili u formi *normalnog vodnog skoka* pri kojoj je druga spregnuta dubina h_2 jednaka nizvodnoj normalnoj dubini (slika 9.32) ili u formi *potopljenog vodnog skoka* pri kojoj je druga spregnuta dubina h_2 manja od nizvodne normalne dubine. Pojavom „potapljanja“ vodnog skoka tijelo vodnog skoka „putuje“ uzvodno, primjerice sve do položaja kraja preljeva praktičnog profila.

Ukoliko se zbog relativno velikih nagiba dna kanala nizvodne dionice (koja nastupa nakon preljeva) ne mogu osigurati uvjeti potopljenog vodnog skoka pribjegava se izvođenju tzv. *bučnice* ili *slapišta*.

Bučnica se izvodi na kraju preljevne građevine i to ukapanjem ispod kote dna prirodnog korita (produbljenje) u obliku bazenskog prostora u kojem se postavljaju i disipacijski „zubi“ (slika 9.35.). Dakle, izvedbom bučnice osigurava se stabilizacija odnosno potapljanje vodnog skoka u gabaritima samog objekta bučnice.



Slika 9.35 – prikaz karakterističnih izvedbi bučnica sa „zubima“ kojima se omogućuje dodatno stimuliranje disipacije u vodnom skoku koji će se dogoditi u prostoru bučnice

10 Potencijalno strujanje

Potencijalnim strujanjem analizira se bezvrtložno strujanje neviskozne tekućine. Neviskoznost i bezvrtložnost tekućine temeljne su značajke u promatranju idealne tekućine. Obzirom da u idealnoj tekućini nema djelovanja viskoznosti i posljedičnih posmičnih naprezanja brzine u blizini krute stijenke ne razvija se granični sloj. Usprkos očiglednom odstupanju od ponašanja realne tekućine, u većem dijelu konvergentnog strujnog polja realne tekućine (ubrzavanje uzduž toka) opravdano je usvajanje pretpostavki o bezvrtložnosti i neviskoznosti.

Neviskozno i bezvrtložno strujanje je potencijalno strujanje u smislu matematičke interpretacije u kojoj postoji Helmholtz-ova potencijalna funkcija ϕ odnosno funkcija brzinskog potencijala. Za komponente brzina bez obzira na izbor koordinatnog sustava (kartezijev, polarni, cilindrični) vrijedi odnos:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \phi \quad (10.1)$$

Komponente dvodimenzionalnog strujanja u i v u kartezijevom koordinatnom sustavu definirane su prema tome s parcijalnim derivacijama brzinskog potencijala u x i y smjeru:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (10.2)$$

Dimenzija brzinskog potencijala je m/s^2 . Linije koje povezuju točke istog potencijala $\phi(x,y)$ nazivaju se ekvipotencijale. U strujnom polju nestišljive tekućine u kojem nisu prisutni ponori i izvori također vrijedi i jednačba kontinuiteta:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.3)$$

Uvođenjem izraza 10.1 u 10.3 dobiva se i Laplace-ova diferencijalna jednačba:

$$\text{div}(\text{grad}(\phi)) = \Delta \phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (10.4)$$

Ovom jednadžbom opisana je i strujna mreža sačinjena od strujnica i ekvipotencijala koje su u svakoj točki promatranog strujnog polja ortogonalne. Obzirom da ortogonalno na konturu krute granice nema strujanja ($\partial\phi/n=0$), kontura krute granice također predstavlja jednu strujnicu. Prema tome strujno polje je definirano ukoliko je poznato $\phi = \phi(x,y)$.

Strujne linije također se mogu opisati strujnom funkcijom $\psi(x,y)$ koja zbog uvjeta ortogonalnosti također definira i vrijednosti komponenti brzina u strujnom polju:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (10.5)$$

Obzirom da je pravac vektora brzina tangencijalan na svaku točku strujnice vrijedi jednakost:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = 0;$$

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = i(vdz - wdy) + j(wdx - udz) + k(udy - vdx) = 0 \quad (10.6)$$

Uvođenjem izraza 10.4a u jednadžbu strujnice 10.6 dobiva se:

$$udy - vdx = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = d\psi = 0 \quad (10.7a; 10.7b)$$

Gornjim izrazom potvrđena je i činjenica da nema promjene strujne funkcije uzduž strujnice. Fizikalni smisao ove tvrdnje je da nema proticanja kroz konturu strujnice.

Strujna mreža sačinjena je od ekvipotencijalnih i strujnih linija karakteriziranih sa $\phi = \text{konst.}$ i $\psi = \text{konst.}$

Potencijalno strujanje pretpostavlja bezvrtložnost definiranu izrazom:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.8)$$

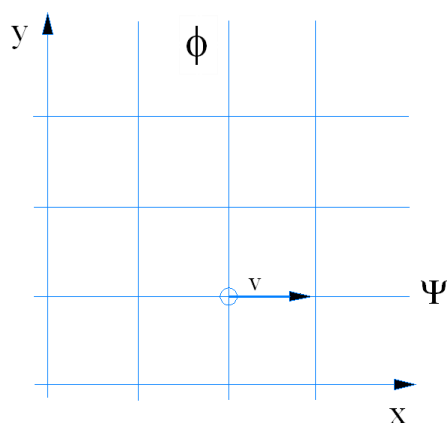
što zajedno sa izrazom 10.5 daje odnose:

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \Delta \Psi = 0 \quad (10.9)$$

Izraz 10.9 ukazuje na činjenicu da pri ravninskom bezvrtložnom strujanju strujna funkcija ψ također zadovoljava Laplace-ovu jednadžbu.

10.1 Paralelno potencijalno strujanje

Najjednostavniji oblik strujanja je paralelno strujanje. Za dvodimenzionalno strujanje u x - y ravnini prisutna je samo translatorska komponenta strujanja u x smjeru ($u, v=0$).



Slika 10.1 – paralelno potencijalno strujanje

Strujne linije i ekvipotencijale u polju strujanja prema jednadžbi 10.2 definirane su izrazima:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (10.10)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Integracija gornjih jednadžbi direktno vodi do općeg rješenja definiranog jednadžbama:

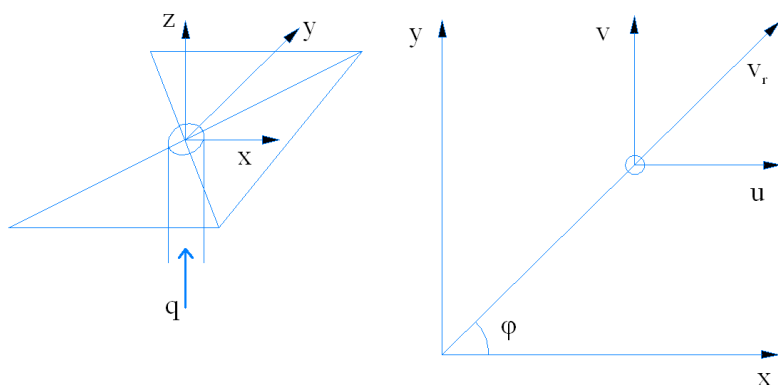
$$\phi = ux + c_1 \quad (10.11)$$

$$\Psi = uy + c_2 \quad (10.12)$$

Prema tome, ekvipotencijale su paralelne s x osi, a strujnice s y osi. Za definiranje konstanti integracije c_1, c_2 potrebne su dodatne informacije.

10.2 Izvori i ponori

Ponori i izvori predstavljaju singularne točke u polju strujanja. Te točke predstavljaju mjesto na kojem „izvire“ ili „ponire“ radijalno strujanje. Pojmovi ponora i izvora nisu vezani samo uz matematičke apstrakcije nego nalaze i fizikalnu interpretaciju u određenim formama realnog strujanja. Primjerice, ponor u ravninskom strujanju definira pristrujavanje prema vertikalnom zdenca, a izvor u ravninskom strujanju definira strujanje u okolici upojnog vertikalnog zdenca. Kod strujanja prema crpnom zdenca radijalna komponenta strujanja v_r usmjerena je prema točki ponora, a u slučaju upojnog zdenca od točke izvora (slika 10.2; promjenom predznaka $q \rightarrow -q$ obuhvaćen je slučaj ponora).



Slika 10.2 – strujanje prema izvoru

U polarnom koordinatnom sustavu brzine su definirane iz jednadžbe kontinuiteta:

$$v_r = \frac{q}{2\pi \cdot r} \quad v_\varphi = 0 \quad (10.13a; 10.13b)$$

a prelaskom u kartezijev koordinatni sustava komponente brzina su izražene slijedećim jednakostima:

$$u = v_r \cos \varphi = \left(\frac{q}{2\pi r} \right) \cos \varphi; \quad v = v_r \sin \varphi \quad (10.1a; 10.14b)$$

Oznaka q označava intenzitet izvora, a u matematičkom smislu predstavlja i rubni uvjet. Kako je vrijednost umnoška 2π konstanta vrijedi:

$$\frac{q}{2\pi} = c = v_r r = \text{konst.} \quad (10.15)$$

Uvrštavanjem izraza 10.14a i 10.14b u jednadžbe 10.2 i 10.5 dobivene su sljedeće jednakosti:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = \frac{q}{2\pi r} \left(\frac{r}{r} \right) \cos \varphi = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (10.16)$$

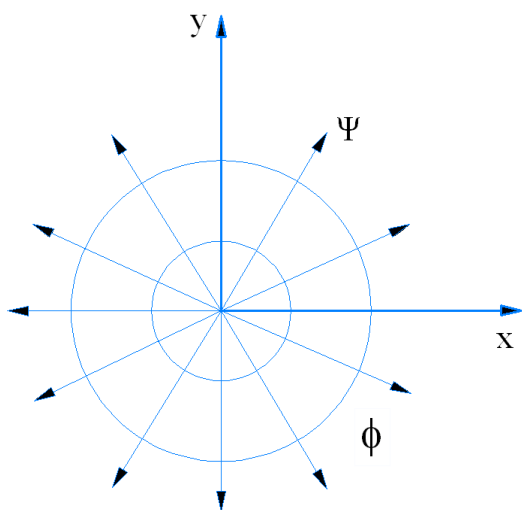
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = \frac{q}{2\pi r} \left(\frac{r}{r} \right) \sin \varphi = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (10.17)$$

Integracijom izraza 10.16 i 10.17 definirane su i jednadžbe ekvipotencijala i strujnica promatranog strujnog polja (slika 10.3).

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \frac{q}{2\pi} \ln r = c \ln r \quad (10.18)$$

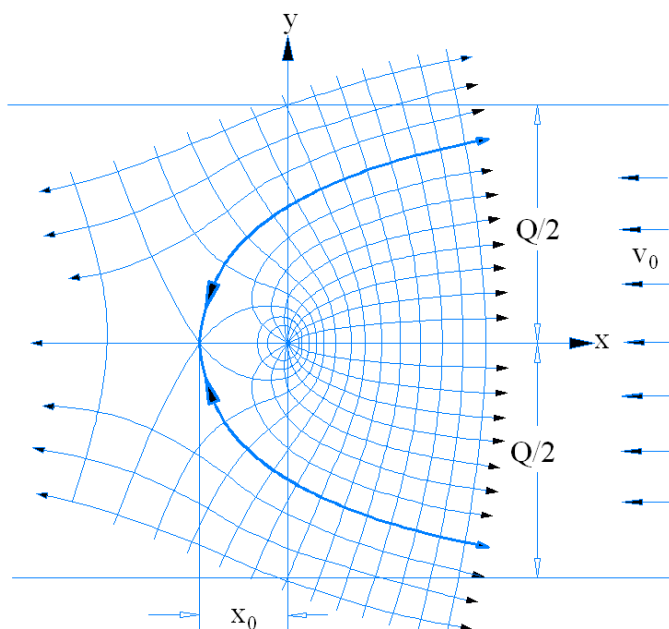
$$\Psi = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{q}{2\pi} \varphi = c \cdot \varphi \quad (10.119)$$

Na slici 10.3 prikazan je primjer radijalnog potencijalnog strujanja u okolini izvora. Strujnice se protežu radijalno iz točke izvora, a ekvipotencijale su koncentrične kružnice.



Slika 10.3 – strujna mreža potencijalnog strujanja u okolini izvora sačinjena od ekvipotencijala i strujnica

Primjenom superpozicije translatornog strujanja sa strujanjem uslijed prisutnosti ponora ili izvora dobiva se strujna mreža za praćenje utjecaja zdenaca na generalno strujanje podzemnih voda (slika 10.4). Ovakve analize uobičajeno se koriste pri definiranju zona u kojima ne smije doći do unosa onečišćenja zbog potencijalne opasnosti njegovog pronosa i uvlačenja u sam crpni zdenac. Ukoliko se na slici 10.4 promjeni smjer strujanja s lijeve na desnu stranu, a ponor se zamjeni izvorom, dobiva se strujna mreža za slučaj opstrujavanja tijela s prednjom ovalnom konturom.



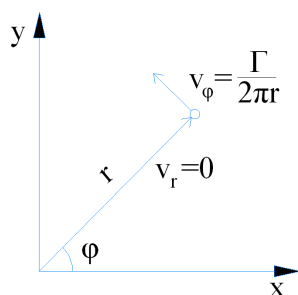
Slika 10.4 – superpozicija translatornog paralelnog strujanja i ponora sa kojima se modelira strujanje podzemnih voda u okolini crpnog zdenca

10.3 Potencijalni vrtlog

Zamjenom strujne funkcije i funkcije brzinskog potencijala dobiva se matematički aparat za opis ravninskog potencijalnog vrtloga. Strujanja u potencijalnom vrtlogu je bezvrtložno i zadovoljava Laplace-ovu jednačbu a jednačbe 10.18 i 10.19 prelaze u oblik:

$$\phi = c\varphi \quad (10.20)$$

$$\Psi = c \ln r \quad (10.21)$$



Slika 10.5 – potencijalni vrtlog

Prema matematičkoj konvenciji pozitivni smjer zaokreta je suprotno od smjera kazaljke na satu (slika 10.5), a raspodjela brzina u potencijalnom vrtlogu je definirana jednadžbom:

$$v_{\varphi} = \frac{c}{r} \quad (10.22)$$

Uvođenjem potencijalnog vrtloga omogućava se i interpretacija gubitaka kinetičke mehaničke energije u strujnom polju. Time se omogućava i opis hidrodinamičkih pojava vezanih uz ponašanje realne tekućine. Naime, uvođenjem potencijalnih vrtloga u strujno polje ne narušavaju se uvjeti potencijalnog strujanja (bezvrtložnost, neviskoznost), a istovremeno se omogućava ekstrakcija i prijenos kinetičke energije osnovnog toka u kinetičku energiju potencijalnog vrtloga. U potencijalnom vrtlogu kinetička energija ostaje konzervirana, a zbog odsustva viskoznosti nema ni disipativnog mehanizma kojim bi se kinetička energija vrtloga pretvorila u toplinsku energiju.

Primjenom superpozicije potencijalnog vrtloga s ponorom ili izvorom dobivaju se vrtložni izvori ili vrtložni ponori. Nastalo dvodimenzionalno spiralno strujanje posebno je interesantno za definiranje raspodjele tlaka i brzina u turbinama i pumpama. Superpozicijom translatornog strujanja i potencijalnog vrtloga definira se i strujno polje pri opstrujavanju rotacionog cilindra (Magnus-ov efekt).

10.4 Strujna mreža uz zadane rubne uvjete

U prethodnim poglavljima komentirane su raspodjele ekvipotencijala i strujnica (strujnih cijevi) za slučaju neograničenog strujnog polja. U nastavku se opisuje polje brzina pri zadanoj geometriji odnosno pri definiranom položaju rubne strujnice. Analitičko rješavanje takvih problema je relativno složeno, a metodologija rješavanja naziva se konformno preslikavanje, o kojemu u nastavku neće biti spomena.

Na slici 10.6 prikazan je isječak iz strujne mreže sa naznakom kartezijevog koordinatnog sustava. Sa slike 10.6 mogu se uočiti važne karakteristike polja brzina. Okomito na strujnice protok je nula a što se može izraziti i jednakošću:

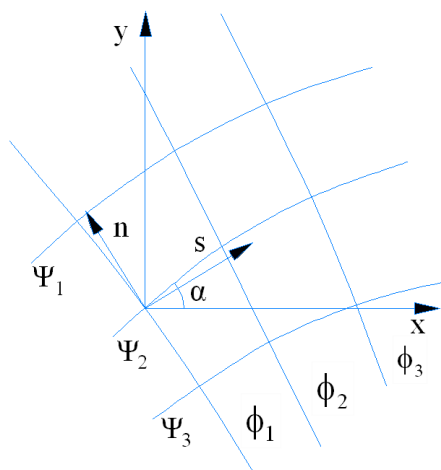
$$\frac{d\Psi}{dn} = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (10.23)$$

Prema tome, između dvije strujnice ψ_2 i ψ_1 postoji protok:

$$d\Psi = q = (\sqrt{u^2 + v^2}) du \quad (10.24)$$

U strujnom polju moguće je postaviti strujnu mrežu sačinjenu od strujnica ψ na međusobnoj udaljenosti dn i ekvipotencijala ϕ na međusobnoj udaljenosti ds . Postavljena kvazi-kvadratna mreža ima geometrijska obilježja $dn=ds$ te za nju vrijedi identitet definiran izrazom:

$$\frac{d\Psi}{dn} = \frac{d\phi}{ds} \quad (10.25)$$



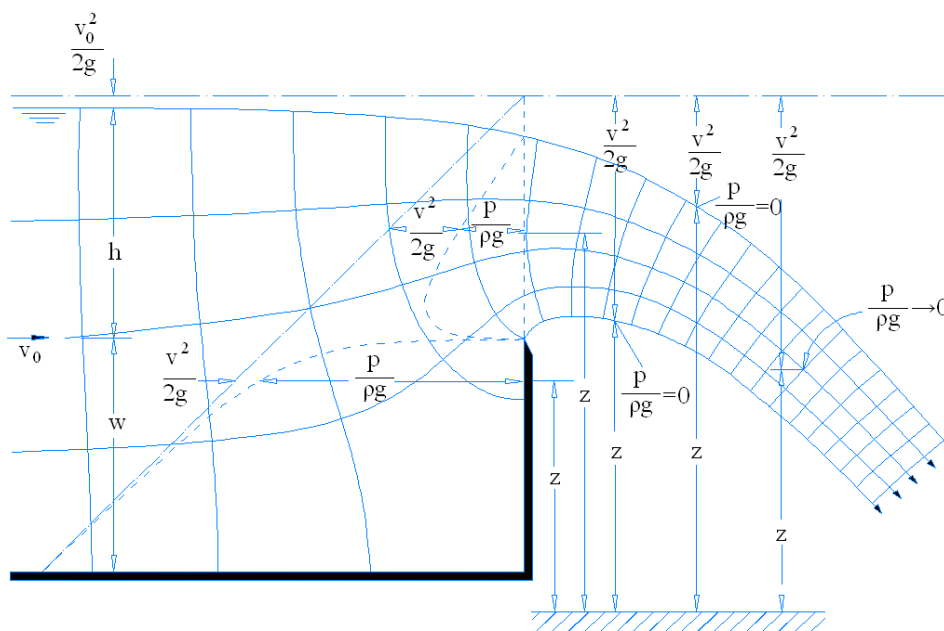
Slika 10.6 – elementi strujne mreže (ekvipotencijale i strujnice)

Primjer kvadratne strujne mreže za slučaj prelijevanja preko oštrobridnog preljeva prikazan je na slici 10.7. Prije nailaska na profil oštrobridnog preljeva uočava se slobodno vodno lice na površini toka. Nakon profila oštrobridnog preljeva pojavljuje se slobodni preljevni mlaz. Utjecaj trenja puno je izraženiji na kontaktu krute stijenke i proticajne tekućine (prije i u profilu preljeva) nego na kontaktu slobodnog preljevnog mlaza i okoline (nakon profila preljeva).

U svakoj točki strujne mreže također mora biti zadovoljena i Bernoulli-jeva jednadžba idealne tekućine, odnosno suma energija položaja, tlaka i kinetičke energije je konstantna. Ukoliko je u nekoj točki strujne mreže poznata brzina, primjerice na slobodnom vodnom licu, onda je također poznata i Bernoulli-jeva konstanta koja korespondira sa položajem energetske linije. Nadalje, piezometarska linija korespondira sa slobodnim vodnim licem. Prema tome, poznavanjem Bernoulli-jeve konstante i geometrije krutih granica definirani su i međusobni odnosi između sva tri člana Bernoulli-jeve jednadžbe u bilo kojoj točki cjelokupne prostorne domene strujne mreže.

Prostorna raspodjela brzina odnosno položaj strujnica određuje se teorijom potencijalnog strujanja. Smanjenje udaljenosti između strujnica ukazuje na povećanje brzina i obrnuto (vidi jednadžbu 10.23). Na slici 10.7 udaljenost između strujnica najmanja je na položaju preljevnog mlaza, a što odgovara položaj najvećih brzina. Sa slike 10.7 također je važno uočiti da tangencijalna brzina v_t na lijevoj otvorenoj granici, na kontaktu sa krutom stijenkom, ima konačnu vrijednost $v_t = v_0$ kao posljedica usvajanja pretpostavke o neviskoznoj tekućini. Uzduž krute granice i u smjeru pristrujavanja tangencijalna brzina v_t se mijenja dok normalna brzina okomita na krutu stjenku ima konstantan karakter definiran kinematskim rubnim uvjetom $v_n = 0$ (nepropusna kruta granica).

Prostorna raspodjela tlaka proračunava se temeljem definirane prostorne raspodjele brzina. Na području preljevnog mlaza rubni uvjeti tlaka definirani su sa vrijednosti atmosferskog tlaka a u profilu oštrobridnog preljeva raspodjela tlaka nije linearna zbog zakrivljenosti strujnica.



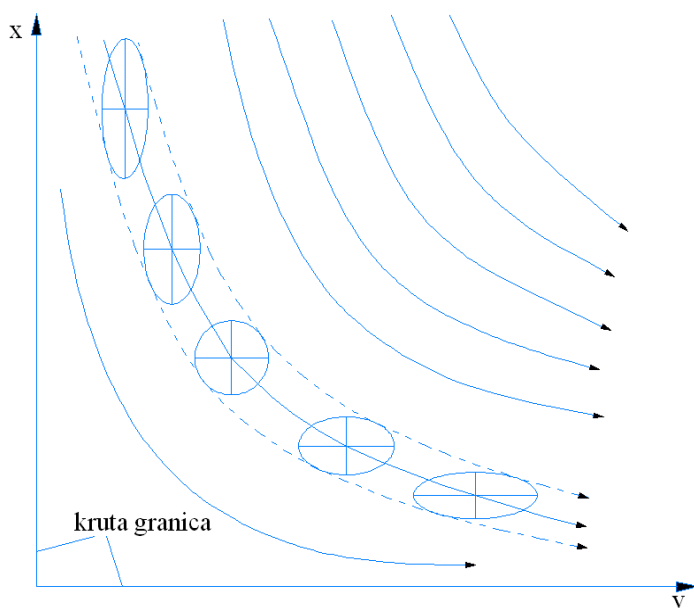
Slika 10.7 – Strujna mreža za preljevanja preko oštrobridnog preljeva

U prošlosti su se strujne mreže konstruirale upotrebom različitih grafičkih postupaka dok se u današnje vrijeme koriste algoritmi za numeričko rješavanje i grafičku interpretaciju rezultata.

Usvajanje pretpostavki o nezviskozosti proticajne tekućine i bezvrtložnosti strujanja nije prihvatljivo u svim onim slučajevima u kojima se iskustveni-eksperimentalni rezultati značajno odstupaju od rezultata dobivenih upotrebom teorije potencijalnog strujanja. Jedan od primjera odnosi se i na opstrujavanje cilindra. Primjena potencijalnog strujanja rezultira sa simetričnom slikom strujanja i raspodjelom tlakova u odnosu na opstrujavani cilindar pa integracija tlakova po konturi cilindra daje silu otpora koja je jednaka nuli.

Potencijalno strujanje ne predstavlja adekvatan model za strujanje u kojem se u samoj blizini krute stjenke (granični sloj) pojavljuje prirast tlaka uzduž toka, sa posljedičnim odvajanjem graničnog sloja. Generalizirano, potencijalna teorija nudi adekvatan opis strujanja na područjima konvergentnih dionica otvorenih vodotoka i sustava pod tlakom (suženja proticajnih profila) u kojima nema prirasta tlaka uzduž osnovnog toka. S druge strane, potencijalno strujanje učestalo se koristi i u analizi toka podzemnih voda u kojima su brzine relativno male te ne dolazi do pojave odvajanja graničnog sloja od krutih granica.

Nedostatnost teorije potencijalnog strujanja može se ilustrirati i slijedećim primjerom. Strujno polje definirano je strujnom funkcijom $\psi = a(x^2 - y^2) = \text{konst.}$ Odgovarajuće strujnice su hiperbole sa dijagonalnim asimptotama ($y = \pm x$) u svakom kvadrantu. Ukoliko se promatrana domena strujanja ograniči samo na područje omeđeno sa dvije asimptote, dobiva se slika ravninskog potencijalnog strujanja uz nepropusne ortogonalne granice (slika 10.8). Kako se sa slike 10.8 može uočiti, osi promatranog ovalnog djelića tekućine ostaju ortogonalne, a što ukazuje na odsustvo vrtložnosti. U samoj blizini pravog kuta strujnice se udaljavaju te se zaključuje da u tom području nastupa usporavanje i povećanja tlaka. Prema tome, u neposrednoj blizini pravog kuta očekuje se odvajanje graničnog sloja i pojava vrtloga.



Slika 10.8 – ravninsko potencijalno strujanje u blizini krutih granica položenih pod pravim kutem

11 Strujanje podzemnih voda

11.1 Uvod

Podzemna voda je u najvećem broju zemalja, posebno u aridnim područjima, temeljni izvor pitke vode. Čak i u zemljama u kojima postoji obilje površinskih voda podzemnim vodama se pokriva većina potreba za pitkom vodom.

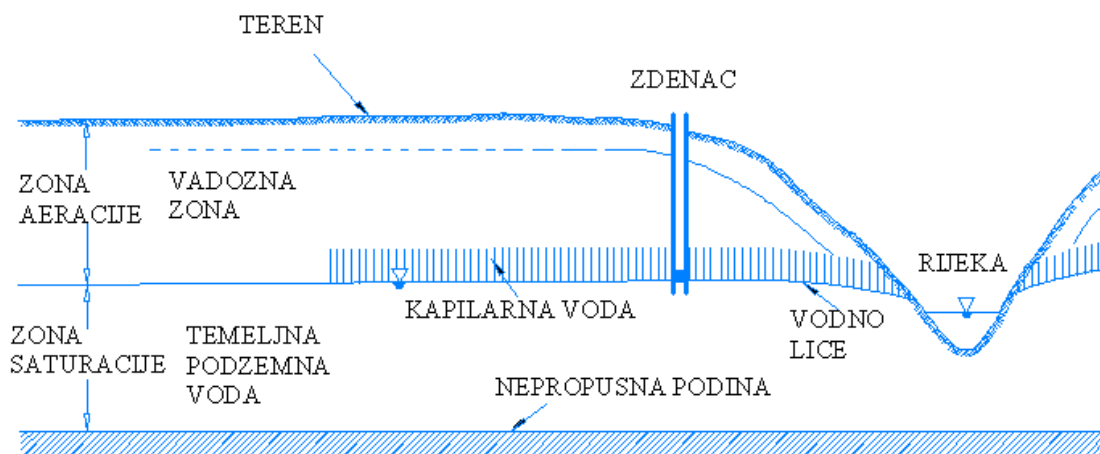
Pod pojmom podzemnih voda podrazumijeva se voda koja ispunjava pore stijenske geološke formacije. Zona aeracije pokriva područje u kojem je ispunjenost pora samo djelomična dok u zoni saturacije voda ispunjava pore u potpunosti (slika 11.1).

Podzemne vode u području korijenja vegetacije imaju izraženu dnevnu i sezonsku dinamiku. U periodima jakih oborina voda infiltrira u tlo odnosno giba se prema dolje a može nastupiti i potpuno zasićenje pora. U sušnim periodima kroz proces transpiracije voda se kreće prema gore.

Područje između korijenja vegetacije i zone kapilarnog utjecaja naziva se vadozna zona. U periodima kada nije prisutna infiltracija, voda je u mirovanju a zadržava se uz pomoć djelovanja kapilarnih sila. Pri intenzivnoj infiltraciji voda prolazi kroz tu zonu prema dolje uslijed djelovanja gravitacije.

Zona kapilarnog utjecaja proteže se od vodnog lica temeljne podzemne vode (od zone saturacije) do maksimalne visine kapilarnog odizanja. Visina kapilarnog odizanja ovisi o karakteristikama tla pa u slučaju fino-zrnih materijala može postizati i do 3m. U krupnozrnatom materijalu ova visina je zanemarivo mala. Vertikalnim udaljavanjem od razine vodnog lica temeljne podzemne vode prema gore sa vodom ostaju ispunjene sve manje pore, što znači da se smanjuje i stupanj vlažnosti. Kako bi se i formalno definiralo područje koje se smatra zonom kapilarnog utjecaja uobičajeno se koristi granična vrijednost zasićenja od 75%. Prema tome zona kapilarnog utjecaja proteže se od vodnog lica temeljne podzemne vode (100% zasićenja) do razine u kojoj je zasićenje 75%. U tom području vlada i tlak koji je manji od atmosferskog.

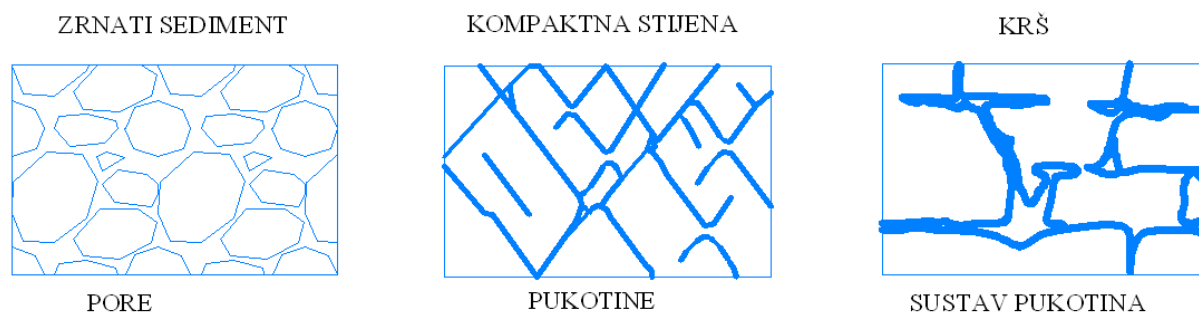
Zona temeljne podzemne vode je zasićena do saturacije (100%) i proteže se od nepropusne podine do razine vodnog lica. Na razini vodnog lica tlak je jednak atmosferskom.



Slika 11.1 - podjela podzemnih voda na zone

Strujanje podzemnih voda može se održati samo ukoliko su pore međusobno povezane. Ukoliko je raspored pukotina takav da voda relativno lagano struji kroz njih (šljunak, pijesak), geološka formacija se naziva vodonosnik dok u suprotnom slučaju geološku formaciju nazivamo slabo propusni sloj (glina).

U praksi i teoriji najčešće se promatraju stijene međuzrnske poroznosti (zrnati sediment - šljunci, pijesci i prahovi). Pore su u tim stijenama dobro povezane i relativno homogene zbog čega je strujanje kroz takav sustav pukotina (pora) i krutih čestica relativno jednostavan za opis matematičkim izrazima. U stijenama pukotinske poroznosti (kompaktna stijena – granit) voda može cirkulirati jedino kroz mikroskopske pukotine pa zbog relativno nedefiniranog stupnja povezanosti pukotina (pora) opis strujanja je više temeljen na stohastičkom a manje na determinističkom pristupu. Posebni slučaj predstavlja krš u kojem se pojavljuju i koncentrirani tokovi kroz relativno velike pukotine u kojima voda struji sa slobodnim vodnim licem ili pod tlakom (slika 11.2).

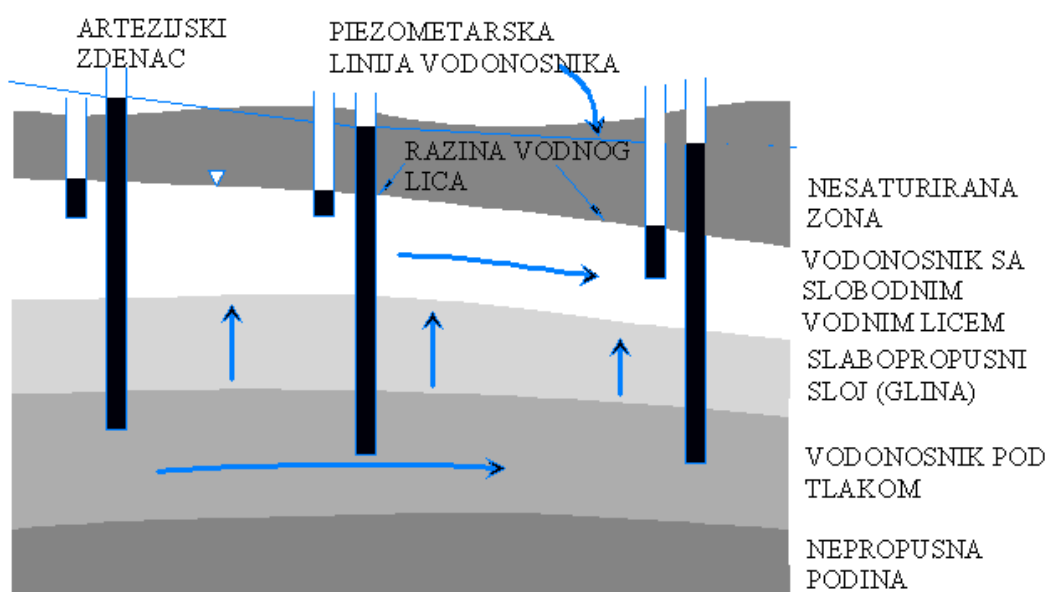


Slika 11.2 – različiti vidovi poroznosti u stijenama

Na slici 11.3 dan je prikaz tipičnog sedimentne geološke formacije koja je sačinjena od vodonosnika i slabo propusnih slojeva. Slabo propustan sloj razdjeljuju dva različita tipa

vodonosnika. Gornji vodonosnik naziva se vodonosnik sa slobodnim vodnim licem. Bušenjem zdenca samo do dubine tog vodonosnika razina vode u zdencu odgovarati će razini vodnog lica vodonosnika. Doljnji vodonosnik naziva se vodonosnik pod tlakom. Bušenjem zdenca do dubina tog vodonosnika razina vode u zdencu biti će iznad doljnje plohe slabo propusnog sloja. Ovisno o razinama koje se pojavljuju u zdencima ovisiti će i smjer strujanja kroz slabo propustan sloj. Za situaciju sa slike 11.3 smjer strujanja kroz slabo propustan sloj biti će prema gore budući su razine vode u zdencima doljnjeg vodonosnika (pod tlakom) iznad razina vode u zdencima gornjeg vodonosnika (sa slobodnim vodnim licem). Obzirom da zdenci ujedno predstavljaju i piezometre, tok kroz slabo propusni sloj ostvaruje se od položaja veće energije prema položaju manje energije. Potrebno je napomenuti da su brzine strujanja kroz slabopropustan sloj toliko male da je član kinetičke energije zanemariv, odnosno da se piezometrska i energetska linija poklapaju.

Zdenci uronjeni u vodonosnik pod tlakom zovu se i arteški zdenci. Nadalje, zdenci koji se izvode ukapanjem kroz cijeli sloj vodonosnika, sve do slabo propusnog sloja ili sve do nepropusne podine zovu se potpuni zdenci. Ukoliko je ukapanje samo do točke koja se nalazi iznad slabo propusnog sloja ili iznad nepropusne podine nazivaju se nepotpuni zdenci.



Slika 11.3 - tipična sedimentna geološka formacija sačinjena od vodonosnika i slabo propusnih slojeva

11.2 Strujanje kroz poroznu sredinu

Strujanje se uvijek odvija od položaja veće ka položaju manje energije. Kako je već prethodno komentirano brzina strujanja u toku podzemnih voda je vrlo mala zbog čega se umjesto praktično

energetske i piezometarske linije identične. Prema tome u Bernoulli-jevoj jednadžbi član kinetičke energije je zanemarivo mali ($v^2/2g \approx 0$) a bitnu ulogu zadržavaju članovi energije položaja z (izražene kao vertikalna udaljenost od referentne ravnine $z=0$) i energije tlaka ($p/\rho g$) odnosno njihova suma koja izražava piezometarsku razinu h :

$$h = z + \frac{p}{\rho g} \quad (11.1)$$

Brzine strujanja podzemne vode, iako relativno male, bitan su hidraulički parametar. Zbog toga je važno definirati nekoliko osnovnih pojmova vezanih uz pojam brzina strujanja. Stvarni profil brzina strujanja kroz pore prikazan je na slici 11.4a. Obzirom da su pore nejednoliko raspoređene po prostoru, putanja čestice vode je izrazito krivolinijska (slika 11b) a praćenje gibanja čestice vode na takvoj mikroskali vrlo je složena zadaća. U smislu rješavanja praktičnih problema vezanih uz strujanje kroz poroznu sredinu, definira se brzina v_S dobivena mjerenjem vremena t potrebnog da „markirana“ čestica pređe horizontalnu udaljenost L . S druge strane ni brzina v_S nije od praktičnog značaja ukoliko se želi proračunati protok kroz presjek vodonosnika, budući je presjek dijelom sačinjen od krutih čestica a dijelom od tekućine. Parametar koji definira odnos površine proticajnog presjeka kroz koji protiče voda A_T naspram ukupne površine presjeka A naziva se koeficijent poroznosti n :

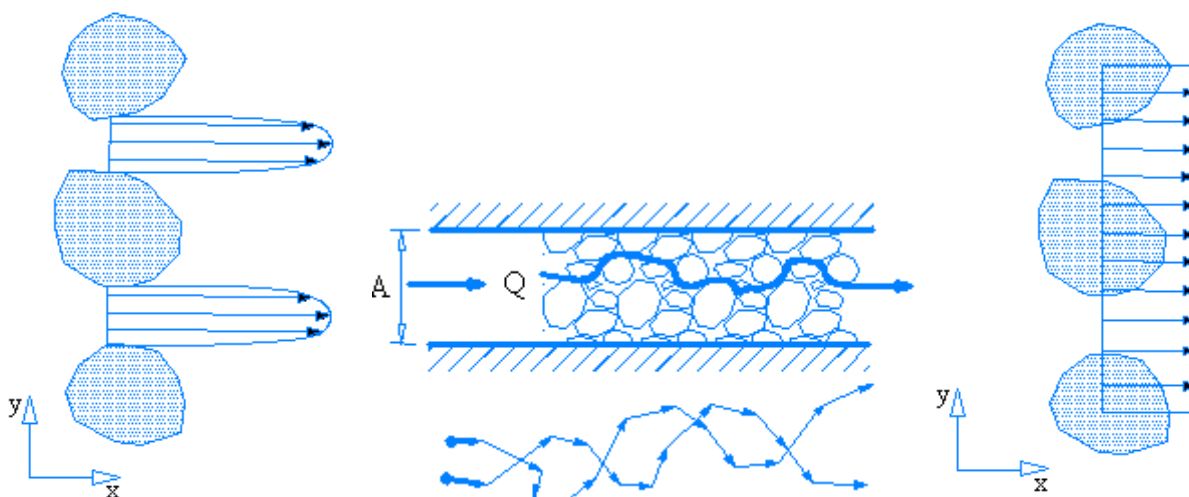
$$n = \frac{V_T}{V} = \frac{A_T}{A} \quad (11.2)$$

gdje je V_P volumen pora a V volumen reprezentativnog uzorka. Kako je protok kroz proticajni profil izražen sa umnoškom brzine v_T i površine pora A_T moguće je definirati i srednju brzinu v kroz cijeli proticajni presjek A koja se naziva i filtarska ili Darcy-jeva brzina (slika 10.4c):

$$v_T A_T = vA \quad v = \frac{v_T A_T}{A} \quad v = n v_T \quad (11.3)$$

Obzirom da je koeficijent poroznosti <1 , Darcy-jeva brzina također je manja od brzine v_T . Potrebno je skrenuti pažnju da je upotreba Darcy-jeve brzine smislaona upravo u slučaju proračuna ukupnog protoka kroz neki porozni proticajni presjek no ne i u slučaju analize pronosa zagađenja. Naime, u slučaju pronosa zagađenja, brzina napredovanja zagađenja biti će primarno referencirana

na brzinu v_S budući da zagađenje tijekom vremena prevaljuje put $L = v_T t$.



Slika 11.4a,b,c – realni (lijevo) i Darcy-jev (desno) profil brzina strujanja kroz pore

11.2.1 Darcy-jev zakon (1856)

Darcy-jeva brzina je proporcionalna padu piezometarske visine Δh i obrnuto proporcionalna duljini puta Δl na kojem se dogodio taj pad Δh :

$$v = k \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad (11.4)$$

U gornjoj jednadžbi uveden je i koeficijent filtracije k (jedinica m/s). U općem slučaju koeficijent filtracije k je tenzor.

Većina prirodnih stijena ima horizontalnu uslojenost zbog čega je i propusnost u horizontalnim smjerovima x i y izraženija. Ukoliko se postavi x,y ravnina uzduž analiziranog sloja a z smjer okomito na njega, tenzor koeficijenta propusnosti postaje dijagonalan odnosno sadrži samo dijagonalne elemente ($k_x = k_{xx}$; $k_y = k_{yy}$; $k_z = k_{zz}$). U prirodi se često puta pojavljuje i horizontalno izotropna geološka formacija ($k_x = k_y$) koja u vertikalnom smjeru z ima koeficijent filtracije red veličina manji od horizontalnog smjera ($k_z \approx 0,1k_x \approx 0,1k_y$). Potpuno izotropna proticajna sredina javlja se samo u laboratorijskim uređajima.

Parametar $\Delta h/\Delta l = I$ naziva se i hidraulički pad. Za slučaj općeg trodimenzionalnog strujanja hidraulički pad prelazi u oblik:

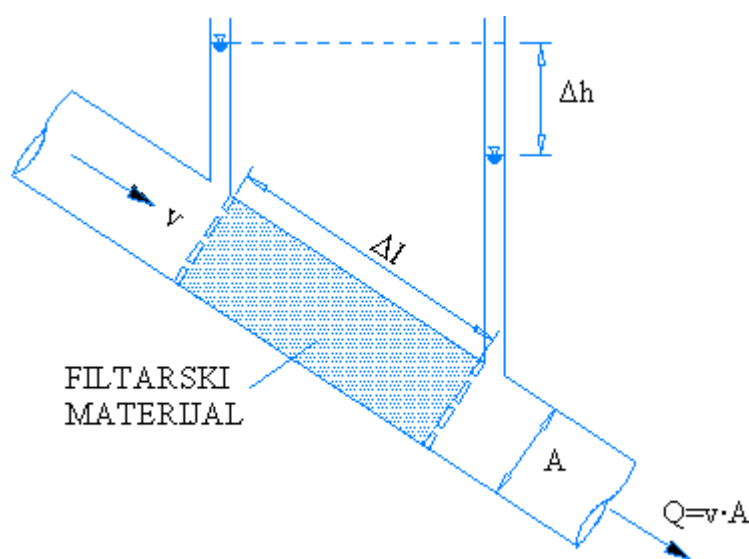
$$I = \text{grad } h = \nabla h \quad (11.5)$$

a Darcyjeva jednadžba u oblik :

$$v = k \text{ grad } h \quad (11.6)$$

Darcy-jeva brzina vezana je i uz Darcy-jev eksperimentalni uređaj (slika 10.5) kojemu je primarna svrha određivanje koeficijenta filtracije (propusnosti) k poroznog filtarskog materijala.

$$v = k \frac{\Delta h}{\Delta l} \quad \rightarrow \quad k = \frac{Q}{A} \frac{\Delta l}{\Delta h} \quad (11.7)$$



Slika 11.5 – shematska skica Darcy-jevog uređaja

Karakteristični rasponi vrijednosti koeficijenta filtracije za stijene međuzrnske poroznosti prikazani su u tablici 10.1. Koeficijent filtracije je u funkciji ne samo geološkog sloja već i proticajne tekućine a izražen je jednakošću:

$$k = \frac{Cd^2v}{g} \quad (11.8)$$

gdje je C koeficijent kojim se karakterizira stijenska matrica, d promjer zrna (\sim promjer pora) a v kinematski koeficijent viskoznosti proticajne tekućine.

	k (m/s)
čisti šljunak	10^{-2} i veći
čisti pijesak	$10^{-2} \div 10^{-4}$
pijesak graduirani	$10^{-4} \div 5 \cdot 10^{-5}$
sitni pijesak	$5 \cdot 10^{-5} \div 10^{-6}$
prah – pijesak	$2 \cdot 10^{-5} \div 10^{-6}$
prah i mulj	$5 \cdot 10^{-6} \div 10^{-7}$
glina	10^{-7} i manje

Tablica 11.1 - karakteristični rasponi vrijednosti koeficijenta propusnosti za stijene međuzrnske poroznosti

Područje važenja Darcy-jevog zakona odnosno linearnog odnosa između Darcy-jevih brzina i pada piezometarske linije vezano je uz laminarni režim strujanja (male brzine ; mali Reynolds-ovi brojevi). Pri premašenju odgovarajućeg (kritičnog) Reynolds-ovog broja narušava se i linearna veza. Turbulentni tokovi u podzemnim vodama, u kojima više ne vrijedi Darcy-jev zakon, obično se javljaju u blizini filtra zdenaca i drugih izvora, općenito pri velikim gradijentima i krupnozrnom materijalu.

11.2.2 Potencijalno strujanje kroz poroznu sredinu

Osnovna jednadžba potencijalnog strujanja je Euler-ova jednadžba što znači da je promatrana tekućina idealna. Potencijalno strujanje pretpostavlja bezvrtložnost a uvjet odsustva vrtložnosti u polju brzina $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ pretpostavlja postojanje odgovarajuće skalarne potencijalne funkcije koja se naziva *brzinski potencijal* $\varphi(t, \mathbf{r})$ a čiji je odnos prema polju brzina izražen jednakošću:

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi \quad \rightarrow \quad \text{rot}(\text{grad } \varphi) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad (11.9)$$

Komponente vektora brzina u kartezijevom pravokutnom sustavu dobivaju se parcijalnom integracijom brzinskog potencijala:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad ; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad ; \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (11.10)$$

U slučaju ravninskog tečenja sa komponentama brzina $v_x = u = \partial \varphi / \partial x$ i $v_y = v = \partial \varphi / \partial y$ rotacija ω je definirana jednadžbom 11.11 a čime se ujedno i dokazuje zadovoljenje uvjeta bezvrtložnosti:

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \equiv 0 \quad (11.11)$$

Potencijalno strujanje ostvaruje doprinos cirkulaciji Γ ($\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ - linijski integral rada vektora brzina uzduž jedne zatvorene krivulje) na dijelu krivulje od točke 1 do točke 2 sa iznosom:

$$\Gamma_{1 \rightarrow 2} = \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_{(1)}^{(2)} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (11.10)$$

koji prema gornjoj jednadžbi ustvari predstavlja razliku potencijala u točkama 1 i 2 bez obzira na odabrani put između te dvije točke (područje integracije). Ukoliko se za ishodišnu točku 1 i konačnu točku 2 odabere položajno ista točka ($1=2$) razlika potencijala jednaka je nuli ($\varphi_2 - \varphi_1 = 0$). Prema tome, ukoliko je strujanje u svim točkama promatranog prostora potencijalno (bezvrtložno), cirkulacija po bilo kojoj zatvorenoj krivulji unutar tog prostora jednaka je nuli ($\Gamma = \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = 0$).

Jednadžba kontinuiteta za strujanje nestišljive tekućine kroz kontrolni volumen postavljen u kartezijevom sustavu, te uz odsustvo ponora i izvora unutar kontrolnog volumena, glasi:

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (11.13)$$

Upotrebom jednadžbe kontinuiteta $\text{div } \mathbf{v} = 0$ i jednadžbe potencijalnog strujanja $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ dobiva se i Laplace-ova diferencijalna jednadžba potencijalnog strujanja:

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0 \quad (11.14)$$

Upotrebom jednadžbe potencijalnog strujanja $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$ i Darcy-jeve jednadžbe za brzinu kroz izotropnu poroznu sredinu $\mathbf{v} = k \text{ grad } h$ definiran je i brzinski potencijal za tokove kroz poroznu sredinu:

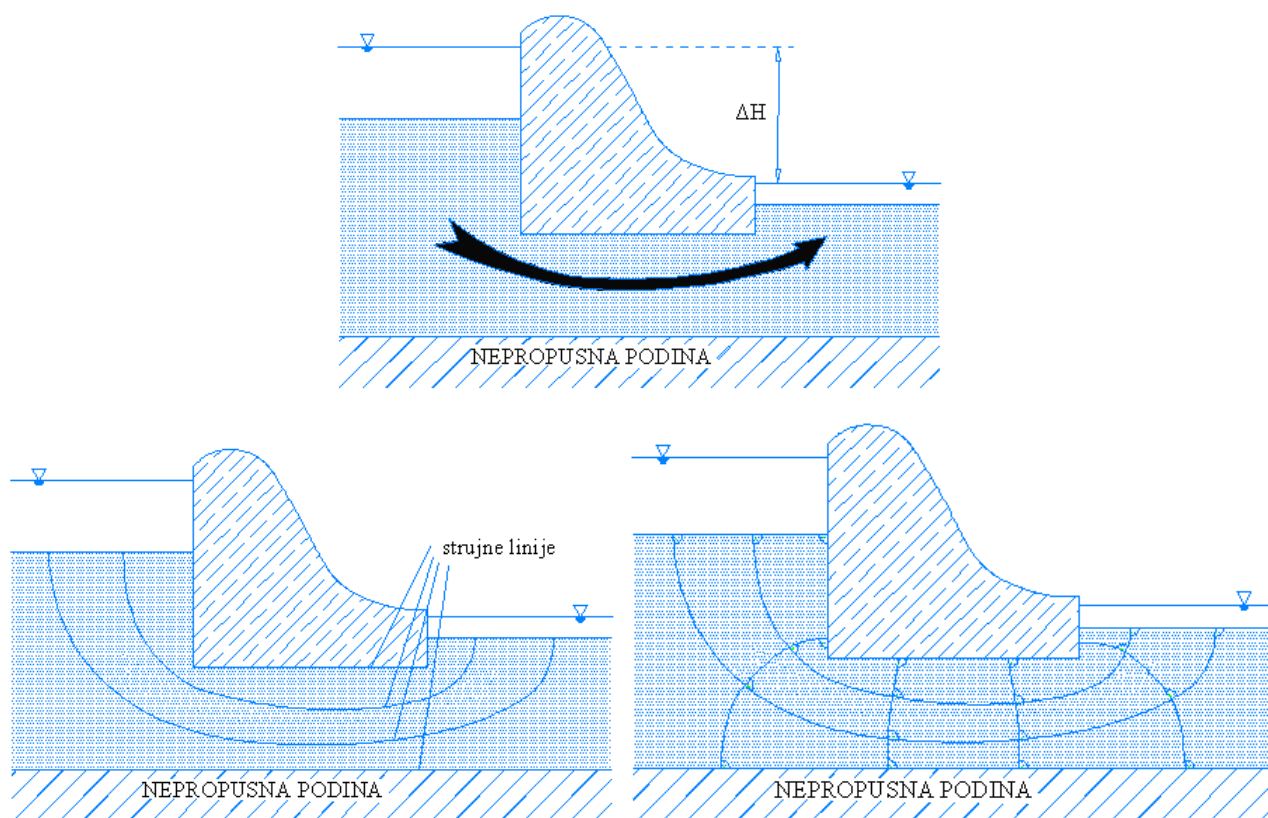
$$\varphi = kh = k \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \quad (11.15)$$

Uvrštavanjem izraza 11.15 u jednadžbu 11.14 dobiva se i Laplace-ova jednadžba strujanja kroz izotropnu poroznu sredinu:

$$k \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad k \neq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (11.16)$$

Ravninsko procjeđivanje kroz izotropnu poroznu sredinu ispod pregradnih profila (slika 11.6a) moguće je analizirati temeljem numeričkog rješavanja jednadžbe 11.16, primjerice sa metodama konačnih diferencija ili konačnih elemenata, ali i grafičkim rješavanjem.

Kao rezultat dobiva se mreža međusobno ortogonalnih strujnih linija (slika 11.6b) i ekvipotencijala (slika 11.6c) na području procjeđivanja kroz izotropnu poroznu sredinu.

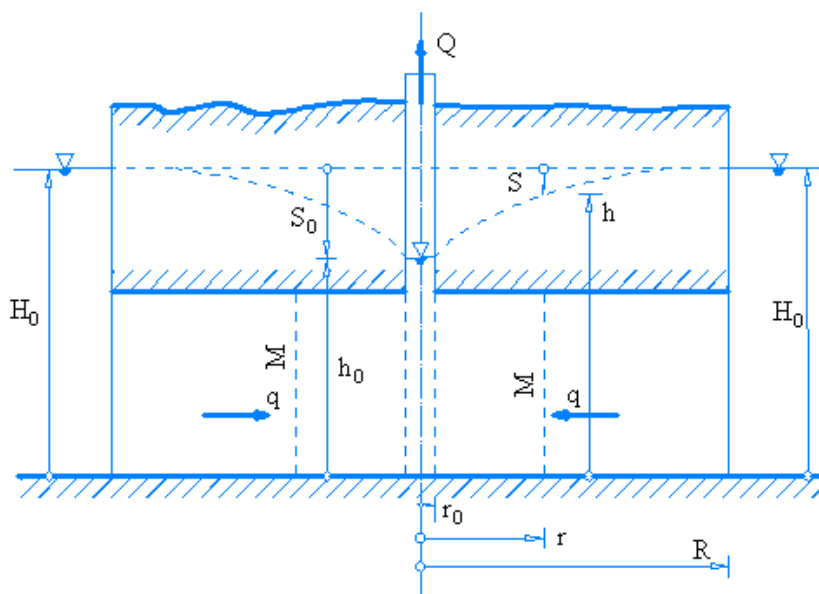


Slika 11.6 - ravninsko procjeđivanje kroz izotropnu poroznu sredinu ispod profila preljeva (ΔH – razlika razina gornje i doljnje vode)

11.2.3 Radijalno strujanje prema zdencima

Za potrebe određivanja koeficijenta propusnosti geološke sredine u okolini zdenca mogu se provesti stacionarna ili nestacionarna pokusna crpljenja. U slučaju stacionarnog pokusa crpi se konstantna i izmjerena količina vode. Pri crpljenju dolazi do smanjenja razina vodnog lica u okolini zdenca što se uobičajeno prati sa piezometrima postavljenim u okolini zdenca. Za geološki profil kroz koji voda radijalno pristrujava prema zdencu usvajaju se pretpostavke o horizontalnosti toka (Dupui-ova pretpostavka) i o homogenosti koeficijenta filtracije k u vertikalnom smjeru. Prihvatljivost pretpostavke o horizontalnosti toka narušava se sa približavanjem položaju crpljenja (zdenca). Nakon određenog vremena po početku crpljenja postignuti će se stacionarni uvjeti u okolini zdenca. To znači da je protok kroz bilo koji proticajni presjek (plašt opsega $2r\pi$ * dubina vodonosnog sloja na udaljenosti r od zdenca) jednak upravo protoku crpljenja Q na položaju zdenca.

Ukoliko se radi o izotropnom vodonosniku pod tlakom koji ima konstantnu debljinu vodonosno sloja M (vertikalna udaljenost između nepropusne krovine i nepropusne podine – slika 11.7) dobiva se jednakost diferencijalna jednadžba oblika :



Slika 11.7 – radijalni vertikalni presjek pri crpljenju iz vodonosnika pod tlakom (Jović, 2006)

$$Q = 2r\pi q = k \frac{dh}{dr} 2r\pi M \quad (11.17)$$

a čije se rješenje dobiva kroz separaciju varijabli:

$$\int dh = \frac{Q}{2\pi Mk} \int \frac{dr}{r} \quad \rightarrow \quad h(r) = \frac{Q}{2\pi Mk} \ln(r) + konst. \quad (11.18a,b)$$

Za beskonačno veliki vodonosnik stacionarno stanje u matematičkom smislu nikada se neće postignuti budući da se sa povećanjem radijalne udaljenosti r stalno povećava i piezometarska visina h . U slučaju ograničenog vodonosnika definiran je rubni uvjet $h(R) = H$, a čime jednadžba 11.18b poprima oblik:

$$h(r) = H_0 + \frac{Q}{2\pi M k} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (11.19)$$

Veličina H_0 ustvari predstavlja „neporemećenu“ piezometarsku visinu odnosno piezometarsku visinu koja je bila prisutna na cijelom području prije početka samog crpljenja. R predstavlja radijus utjecaja zdenca odnosno maksimalnu radijalnu udaljenost do koje se osjeća utjecaj crpljenja.

Ukoliko se želi proračunati koeficijent propusnosti k za slučaj vodonosnika pod tlakom upotrebljava se jednadžba 11.19 uz korištenje poznate (izmjerene) vrijednosti piezometarske razine na mjestu zdenca h_0 i radijusa zdenca r_0 :

$$k = \frac{Q}{2\pi M (H_0 - h_0)} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad (11.20)$$

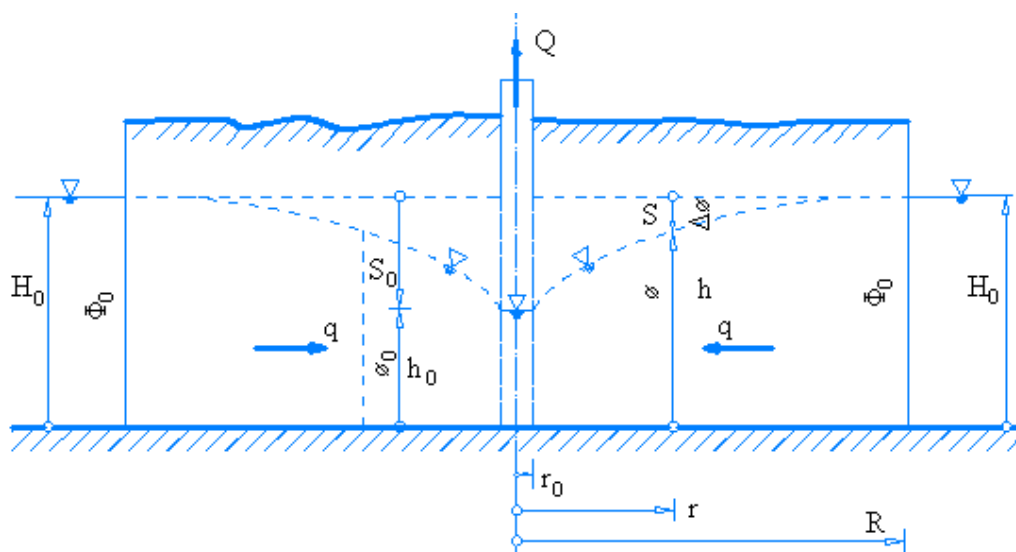
Jednadžba 11.20 omogućuje proračun koeficijenta filtracije temeljem izmjerenih vrijednosti protoka crpljenja Q i sniženja piezometarske razine s prije i poslije crpljenja ($s_0 = H - h_0$) na samom zdencu te uz poznavanje debljine vodonosnog sloja M i vrijednosti radijusa utjecaja zdenca R . Vrijednost R je karakteristika poroznog materijala a kod krupnozrnatih materijala (šljunci) vrijednost R je red veličine veća nego kod sitnozrnatih materijala (prah).

Koeficijent filtracije k može se odrediti i ukoliko su poznate vertikalne udaljenosti od nepropusne podine do razine vodnog lica u piezometrima h_1 i h_2 postavljenim na bilo koje dvije radijalne udaljenosti r_1 i r_2 :

$$k = \frac{Q}{2\pi M (h_2 - h_1)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (11.20)$$

Ukoliko se radi o izotropnom vodonosniku sa slobodnim vodnim licem debljina vodonosnog sloja na radijalnoj udaljenosti r od zdenca je ustvari piezometarska visina h (vertikalna udaljenost između

nepropusne podine i slobodnog vodnog lica - slika 11.8) čime se dobiva jednačba kontinuiteta u diferencijalnom obliku:



Slika 11.8 – radijalni vertikalni presjek pri crpljenju iz vodonosnika sa slobodnim vodnim licem (Jović, 2006)

$$Q = 2r\pi q = k \frac{dh}{dr} 2r\pi h \quad (11.21)$$

a čije se rješenje dobiva kroz separaciju varijabli sa rješenjem:

$$h^2(r) = \frac{Q}{\pi k} \ln(r) + konst. \quad (11.22)$$

Uz rubni uvjet $h(R) = H$ jednačba 11.22 poprima oblik:

$$h^2(r) = H_0^2 + \frac{Q}{\pi k} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (11.23)$$

Ukoliko se želi proračunati koeficijent propusnosti k za slučaj vodonosnika sa slobodnim vodnim licem upotrebljava se jednačba 11.23 uz korištenje poznate (izmjerene) vrijednosti piezometarske razine na mjestu zdenca h_0 i radijusa zdenca r_0 :

$$k = \frac{Q}{\pi(H_0^2 - h_0^2)} \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \quad (11.24)$$

Jednadžba 11.24 omogućuje proračun koeficijenta filtracije temeljem izmjerenih vrijednosti protoka crpljenja Q te kvadrata piezometarskih razina H_0 i h_0 na samom zdencu te uz poznavanje radijusa utjecaja zdenca R .

I u slučaju crpljenja iz vodonosnika sa slobodnim vodnim licem koeficijent filtracije k može se odrediti ukoliko su poznate vertikalne udaljenosti od nepropusne podine do razine vodnog lica u piezometrima h_1 i h_2 postavljenim na bilo koje dvije radijalne udaljenosti r_1 i r_2 :

$$k = \frac{Q}{\pi(h_2^2 - h_1^2)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (11.25)$$

Važno je primijetiti da sniženje razine vodnog lica s pri crpljenju iz vodonosnika pod tlakom ima linearnu vezu sa protokom crpljenja Q :

$$s = h_2 - h_1 = \frac{Q}{2\pi k M} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (11.26)$$

dok u slučaju crpljenja iz vodonosnika sa slobodnim vodnim licem to nije slučaj:

$$h_2^2 - h_1^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (11.27)$$

Kako bi se ostvarila linearizacija i u slučaju vodonosnika sa slobodnim vodnim licem uvodi se potencijal Girinskog ϕ :

$$\phi = k \frac{h^2}{2} \quad \rightarrow \quad \phi_1 = k \frac{h_1^2}{2} \quad \rightarrow \quad \phi_2 = k \frac{h_2^2}{2} \quad (11.28)$$

čijim se uvođenjem u jednadžbu 10.27 dobiva linearan odnos između protoka crpljenja Q i pada potencijala Girinskog $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = k \left(\frac{h_2^2 - h_1^2}{2} \right) = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \quad (11.29)$$

Linearni odnos između protoka crpljenja Q i sniženja piezometarskih visina s u slučaju vodonosnika pod tlakom, odnosno protoka crpljenja Q i pada potencijala Girinskog $\Delta\phi$ u slučaju vodonosnika sa slobodnim vodnim licem, omogućuje primjenu principa superpozicije ukoliko se u ravnini nalazi grupa zdenaca. Superpozicijom se određuje ukupno sniženje s u bilo kojoj točki X u ravnini u kojoj djeluje grupa zdenaca Z_1, Z_2, \dots, Z_n (slika 10.9) i to jednostavnom sumacijom sniženja s_1, s_2, \dots, s_n (za vodonosnik pod tlakom):

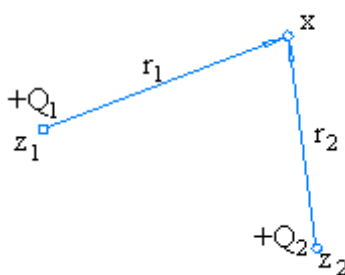
$$s_x = \sum_1^n s_i = \frac{Q_1}{2\pi kM} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{Q_2}{2\pi kM} \ln\left(\frac{R}{r_2}\right) + \dots + \frac{Q_n}{2\pi kM} \ln\left(\frac{R}{r_n}\right) \quad (11.30)$$

odnosno padova potencijala Girinskog $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ (za vodonosnik sa slobodnim vodnim licem):

$$\Delta\phi_x = \sum_1^n \Delta\phi_i = \frac{Q_1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{Q_2}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_2}\right) + \dots + \frac{Q_n}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_n}\right) \quad (11.31)$$

Ukupno sniženje piezometarske visine s_x u točki X vodosnosnika sa slobodnim vodnim licem dobiva se direktno iz proračunatog pada potencijala Girinskog (jednadžba 11.31) na slijedeći način:

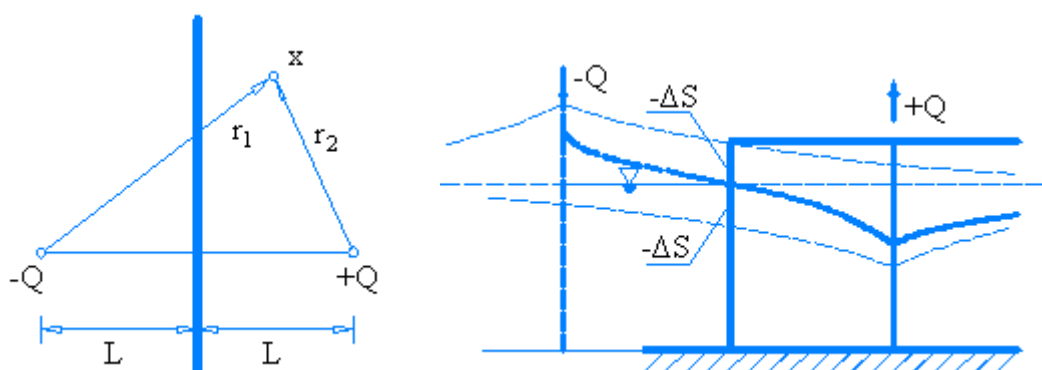
$$\Delta\phi_x = k\left(\frac{H_0^2 - h_x^2}{2}\right) \rightarrow h_x = \sqrt{H_0^2 - \frac{2\Delta\phi_x}{k}} \rightarrow s_x = H_0 - h_x \quad (11.32a,b,c)$$



Slika 11.9 – definicijska skica za analizu sniženja piezometarskih razina s_x u točki ravnine X u kojoj su postavljene zdenci Z_1 i Z_2 (Jović, 2006)

U prirodi se često puta pojavljuju vodotoci u blizini zdenaca. Prirodni vodotoci komuniciraju sa okolnim vodonosnikom (najčešće aluvijalnim). Za vrijeme intenzivnih oborina ili topljenja leda kroz slivno područje u rijeke dolazi veća količina vode a prirast razina vodnog lica u rijekama je brži od prirasta razina podzemnih voda. U takvom slučaju rijeke „prihranjuju“ okolne vodonosnike. S druge strane u sušnim periodima razine vodnog lica u rijekama su ispod razina vodnog lica u

okolnim vodonosnicima zbog čega dolazi do izmjene smjera strujanja, odnosno istjecanja vode iz vodonosnika u otvoreni vodotok. U nastavku se tretira ravnotežni stacionarni slučaj u kojem su razine vodnih lica u vodotoku i u vodonosniku (prije početka crpljenja) jednake odnosno horizontalne (slika 11.10). Kako je protok crpljenja iz zdenca položenog uz vodotok zanemarivo malen naspram protoka u samom vodotoku, razine vodnog lica u vodotoku neće se smanjivati. Za rješavanje problema zdenca uz vodotok koristi se princip superpozicije. Ideja je sadržana u tome da se na jednaku udaljenost od vodotoka sa suprotne strane vodotoka postavi tzv. fiktivni antizdenac kojim se unosi protok $-Q$ i kojim je zamijenjen utjecaj vodotoka. Na taj način superponira se sniženje Δs nastalo djelovanjem stvarnog zdenca (kao da nema vodotoka) i povećanje $-\Delta s$ nastalo djelovanjem fiktivnog antizdenca. Kako su zdenac i antizdenac na jednakoj udaljenosti L od vodotoka, u kontaktnom profilu vodonosnika i vodotoka zadovoljen je i uvjet nepromijenjenosti razina $\Delta s + [-\Delta s] = 0$.



Slika 11.10 – definicijska skica za analizu sniženja s_X u točki ravnine X u vodonosniku uz vodotok (Jović, 2006)

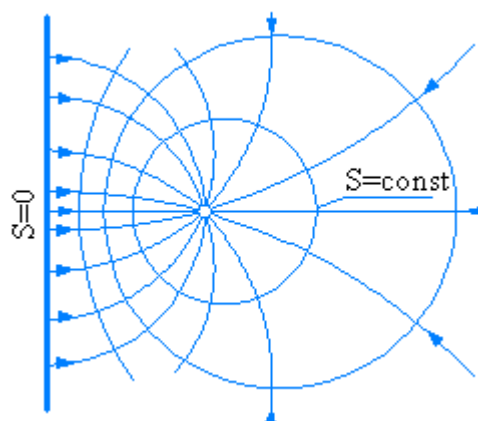
Za slučaj vodotoka uz vodonosnik pod tlakom sniženje s_X u točki X biti će:

$$s_X = \frac{Q}{2\pi kM} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{-Q}{2\pi kM} \ln\left(\frac{R}{r_2}\right) \quad (11.33)$$

odnosno u slučaju vodotoka uz vodonosnik sa slobodnim vodnim licem pad potencijala Girinskog $\Delta\phi_X$ u točki X biti će:

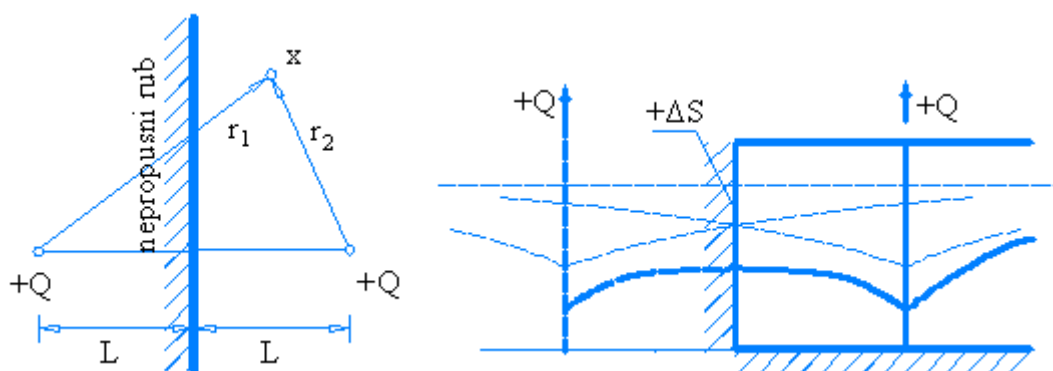
$$\Delta\phi_X = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{-Q}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_2}\right) \quad (11.34)$$

Na slici 11.11 dan je prikaz polja strujanja za slučaju crpljenja uz vodotok.



Slika 11.11 – prikaz polja strujanja za slučaju crpljenja uz vodotok (Jović, 2006)

Osim otvorenog vodotoka u prirodi je čest i slučaj vertikalne nepropusne granice (slika 11.10). Kako je osnovni uvjet nepropusnog vertikalnog ruba odsustvo brzina u smjeru normale na tu granicu $v_n = \partial h / \partial n = 0$, potrebno je „prisiliti“ razinu vodnog lica da bude horizontalna u profilu vertikalnog nepropusnog ruba. Ideja je sadržana u tome da se na jednaku udaljenost od nepropusnog vertikalnog ruba sa suprotne strane postavi tzv. fiktivni zdenac sa jednakim protokom crpljenja Q . Time je zamijenjen utjecaj nepropusnog vertikalnog ruba budući da se superponiranjem sniženja Δs uslijed djelovanja stvarnog zdenca (kao da nema nepropusnog vertikalnog ruba) i sniženje Δs uslijed djelovanja fiktivnog zdenca postiže horizontalna razina vodnog lica odnosno $\partial h / \partial n = 0$.



Slika 11.10 – definicijska skica za analizu sniženja s_x u točki ravnine X u vodonosniku uz nepropusnu vertikalnu granicu (Jović, 2006)

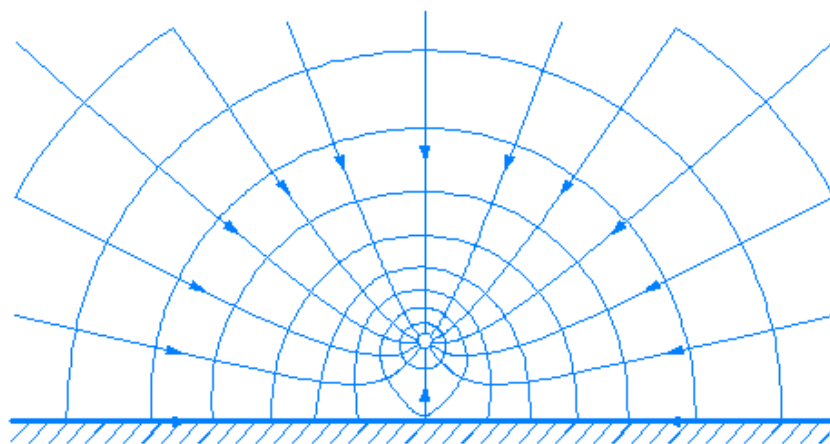
Za slučaj nepropusnog vertikalnog ruba uz vodonosnik pod tlakom sniženje s_x u točki X biti će:

$$s_x = \frac{Q}{2\pi kM} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{Q}{2\pi kM} \ln\left(\frac{R}{r_2}\right) \quad (11.35)$$

odnosno u slučaju nepropusnog vertikalnog ruba uz vodonosnik sa slobodnim vodnim licem pad potencijala Girinskog $\Delta\phi_X$ u točki X biti će:

$$\Delta\phi_X = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_1}\right) + \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r_2}\right) \quad (11.36)$$

Na slici 11.13 dan je prikaz polja strujanja za slučaj crpljenja uz nepropusni vertikalni rub.



Slika 11.13 – prikaz polja strujanja za slučaju crpljenja uz nepropusni vertikalni rub (Jović, 2006)

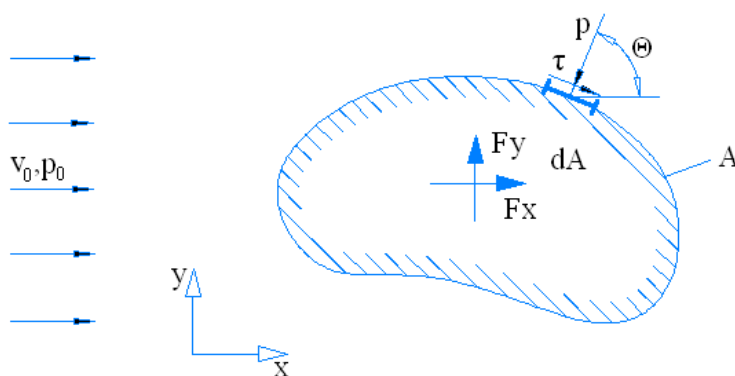
12 Sile na tijelo pri opstrujavanju

12.1 Uvod

Pri opstrujavanju tekućine na tijelo djeluju hidrodinamičke sile. Postojanje samih sila kao i njihov intenzitet u direktnoj su vezi sa fundamentalnim svojstvom tekućina, viskozitetom. Kako je to bilo već analizirano u prethodnim poglavljima (granični slojevi) pri vrlo malim brzinama u cijelom području opstrujavanja tijela dominantan je utjecaj viskoznosti. Pri pojavi velikih brzina pristrujavanja i opstrujavanja utjecaj viskoznosti dominantan je samo u uskom području u blizini same konture opstrujavanog tijela. Ovisno o samoj formi opstrujavanog tijela, pojavljuje se i odvajanje graničnog sloja od konture tijela, a što značajno utječe na raspodjela tlakova, primarno u „nizvodnom“ području od samog tijela.

12.2 Otpor tijela i hidrodinamički uzgon

Na slici 12.1 dan je prikaz dvodimenzionalnog tijela proizvoljnog oblika u kartezijevoj x - y ravnini. Pristrujavanje tekućine gustoće ρ_0 tijelu odvija se sa brzinom V_0 pri tlaku p_0 . Površina oplošja tijela je A , a infinitezimalni element površine dA definira se sa kutom nagiba θ naspram pozitivne x osi.



Slika 12.1 – sila otpora i hidrodinamičkog uzgona na 2D tijelo proizvoljnog oblika

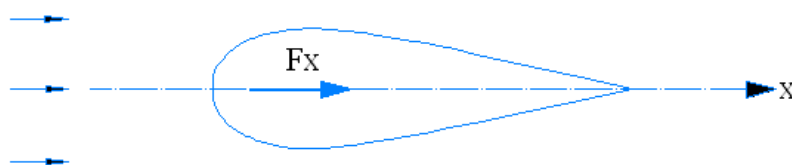
Naprezanja koja djeluju po konturi tijela dijele se na tlačna (normalno na površinu) i posmična (tangencionalno na površinu) naprezanja. Integracijom po smjerovima x i y dobivaju se dvije sile, od kojih je jedna *otpor tijela* (x - smjer) i definira se jednadžbom:

$$F_x = \int_A (-p \cos \theta) dA + \int_A (\tau \sin \theta) dA \quad (12.1)$$

a druga sila se naziva *hidrodinamički uzgon* (y - smjer) i definira se jednažbom:

$$F_Y = \int_A (-p \sin \theta) dA + \int_A (\tau \cos \theta) dA \quad (12.2)$$

Sila otpora tijela (jednažba 12.1) sadrži dva člana od kojih se član pod prvim integralom naziva *sila otpora oblika* a član pod drugim integralom nazviva se *sila površinskog otpora trenja*. U slučaju opstrujavanja tijela koje ima simetričnu formu (slika 12.2) sila hidrodinamičkog uzgona (jednažba 11.2) je nula.

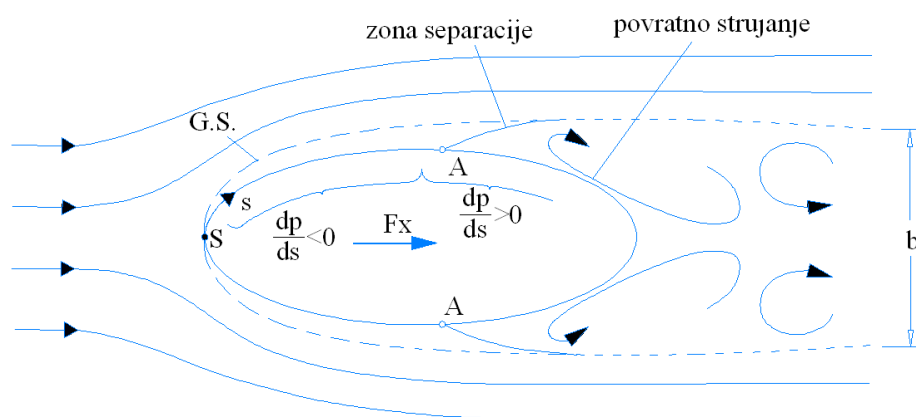


Slika 12.2 – sila otpora tijela na 2D simetrično tijelo

Primarni inženjerski interes koncentriran je na opstrujavanje tijela pri relativno velikim Reynolds-ovim brojevima pri kojima uvjeti strujanja u graničnom sloju primarno ovise o formi konture tijela kojom se induciraju karakteristični gradijenti tlaka. Na slici 12.3 prikazano je dvodimenzionalna eliptična kontura sa naznakom područja gradijenta tlakova $dp/ds < 0$ pri kojem je graničan sloj zadržan uz konture tijela i područjem $dp/ds > 0$ koje rezultira sa pojavom odvajanja graničnog sloja koje inducira pojavu vrtloga u nizvodnom toku. Odvajanje graničnog sloja pojavljuje se u točki A koja se naziva *točka separacije*. U slučaju opstrujavanja ovalnih formi položaj točke separacije A ne mora biti stacionaran a sama vrijednost sile otpora tijela F_x bitno ovisi o položaju točke separacije A. Što je točka separacije A bliže početku tijela zona vrtloženja je intenzivnija pa je i otpor tijela veći dok se pomicanjem točke separacije prema kraju tijela zona vrtloženja sužava a sila otpora se smanjuje. Generalno, pri laminarnom opstrujavanju separacija graničnog sloja nastupa prije nego pri turbulentnom opstrujavanju, zbog čega se u laminarnom opstrujavanju pojavljuju i veće sile otpora tijela. Reynolds-ov broj i hrapavost tijela naravno imaju utjecaj na cijeli promatrani fenomen.

Obzirom da je raspodjela tlaka bitno pod utjecajem odvajanja graničnog sloja odnosno pod utjecajem oblika opstrujavanog tijela, sila otpora tijela F_x u većini slučajeva je vrlo bliska sili otpora oblika F_O .

Bitno je uočiti činjenicu da „nizvodni“ vrtlozi uzrokuju gubitak odnosno smanjenje mehaničke energije pa integral tlakova po površini „nizvodne“ polovice opstrujavanog tijela ima manju vrijednost od integrala tlakova po površini „uzvodne“ polovice opstrujavanog tijela (gledano u x smjeru). U slučaju opstrujavanja idealne tekućine koja nema graničnog sloja, kao ni odvajanje graničnog sloja i pojavu turbulentnih vrtloga, sila otpora oblika je jednaka nuli.

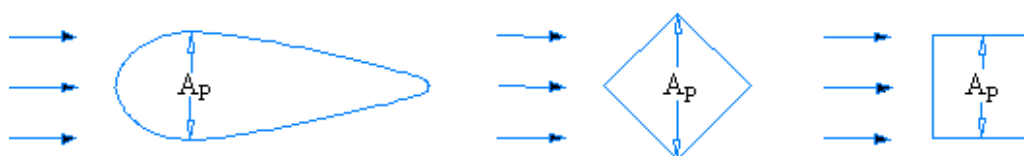


Slika 12.3 – ponašanje graničnog sloja pri opstrujavanju simetričnog oblog tijela realnom tekućinom

Za potrebe praktičnih proračuna definirana je i jednostavna jednadžba za *silu otpora tijela* F_x odnosno *silu otpora oblika* F_o :

$$F_x = C_x \rho A_P \frac{V_0^2}{2} \approx F_o = C_o \rho A_P \frac{V_0^2}{2} \quad \rightarrow \quad C_x \approx C_o \quad (12.3)$$

U kojoj C_x i C_o predstavljaju bezdimenzionalne koeficijente otpora tijela i otpora oblika, ρ gustoću tekućine koja opstrujava tijelo, A_P površinu ortogonalne projekcije tijela na vertikalnu ravninu okomitu na x os. Nekoliko primjera površina A_P za različite opstrujavane forme dano je na slici 12.4.



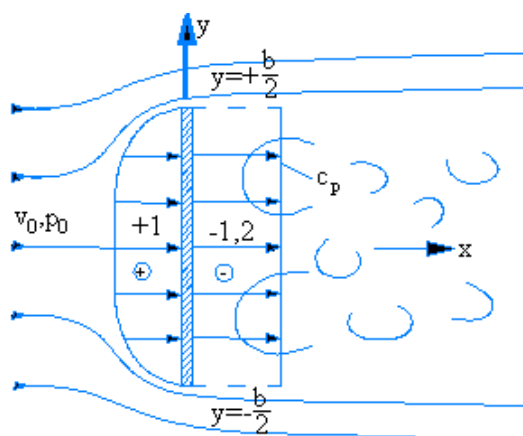
Slika 12.4 - nekoliko primjera površina A_P za različite opstrujavane forme

Vrijednosti koeficijenta otpora tijela C_x i otpora oblika C_o dobivaju se temeljem eksperimentalnih istraživanja. Uobičajena je eksperimentalna praksa da se neko tijelo izloži opstrujavanju te da se izmjeri sila otpora tijela odnosno otpora oblika ($F_x \approx F_o$) a uz poznavanje gustoće proticajne

tekućine kao i brzine pristrujavanja V_0 vrijednost koeficijenta otpora tijela odnosno otpora oblika ($C_X \approx C_O$) dobiva se zamjenom poznatih i nepoznatih članova u jednadžbi 12.3:

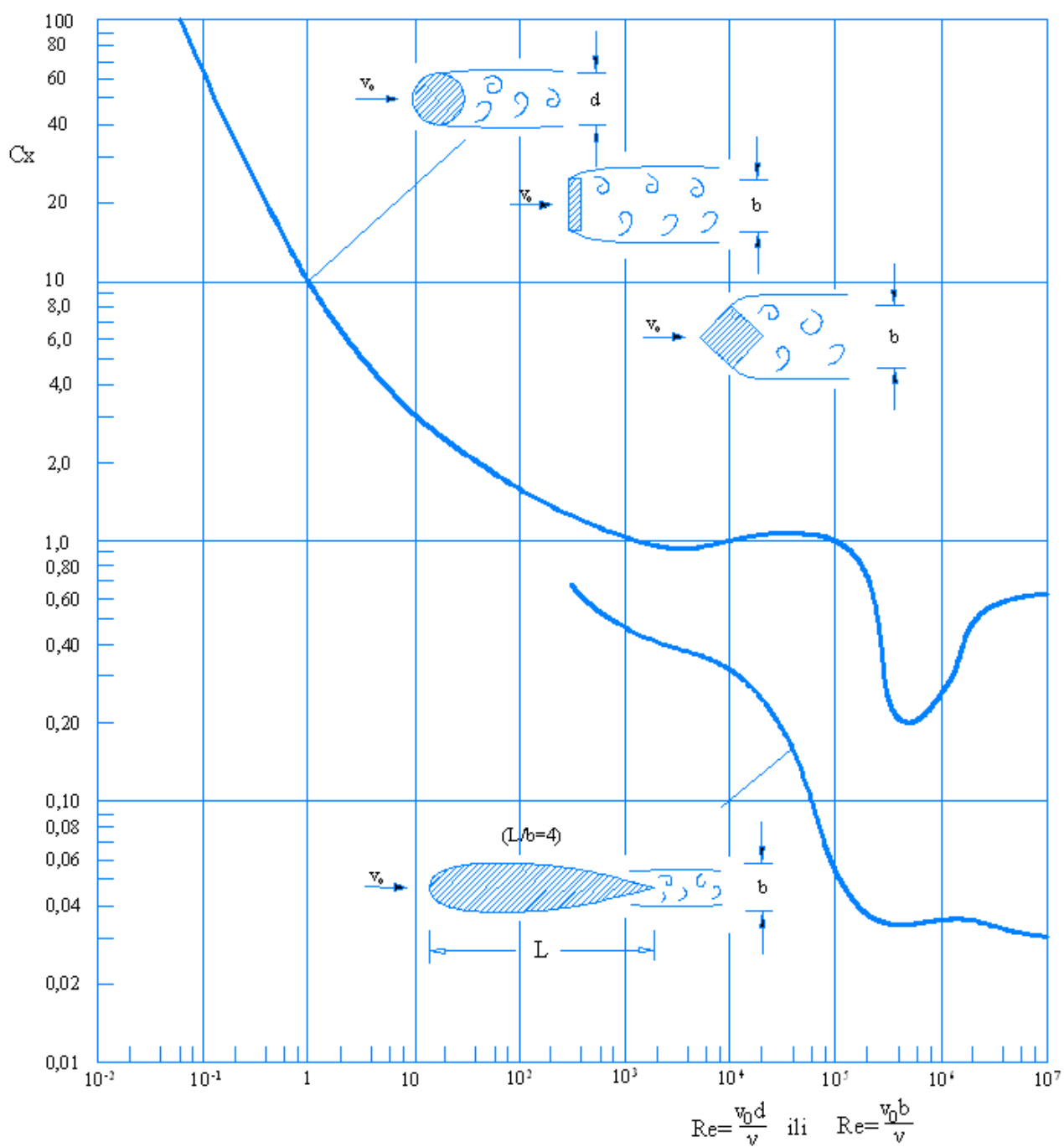
$$C_X = \frac{F_X}{\rho A_p \frac{V_0^2}{2}} \approx C_O = \frac{F_O}{\rho A_p \frac{V_0^2}{2}} \quad (12.4)$$

U općem slučaju opstrujavanja koeficijent otpora tijela C_X je u funkciji oblika samog opstrujavanog tijela, Reynolds-ovog broja, hrapavosti i Mach-ovog broja. Mach-ovim bezdimenzionalnim parametrom se analizira utjecaj kompresibilnosti tekućine a njezin utjecaj se može zanemariti u većini praktičnih problema opstrujavanja poput djelovanja vjetra na građevine (do brzine vjetra cca 200km/h). Pri pojavi opstrujavanja tzv. kratkih hidrauličkih objekata koji imaju oštre bridove Reynolds-ov broj također nema utjecaja budući da je točka separacije fiksirana uvijek na istom položaju (na oštrm bridu objekta) te vrijedi i jednakost $F_X = F_O$ odnosno $C_X = C_O$ (slika 12.5). S druge strane, pri opstrujavanju ravne ploče prisutan je samo drugi integral sa desne strane jednadžbe 12.1 ($F_X = \int_A (\tau \sin \theta) dA$) zbog čega *ne vrijede* ni jednakosti $F_X = F_O$ odnosno $C_X = C_O$.

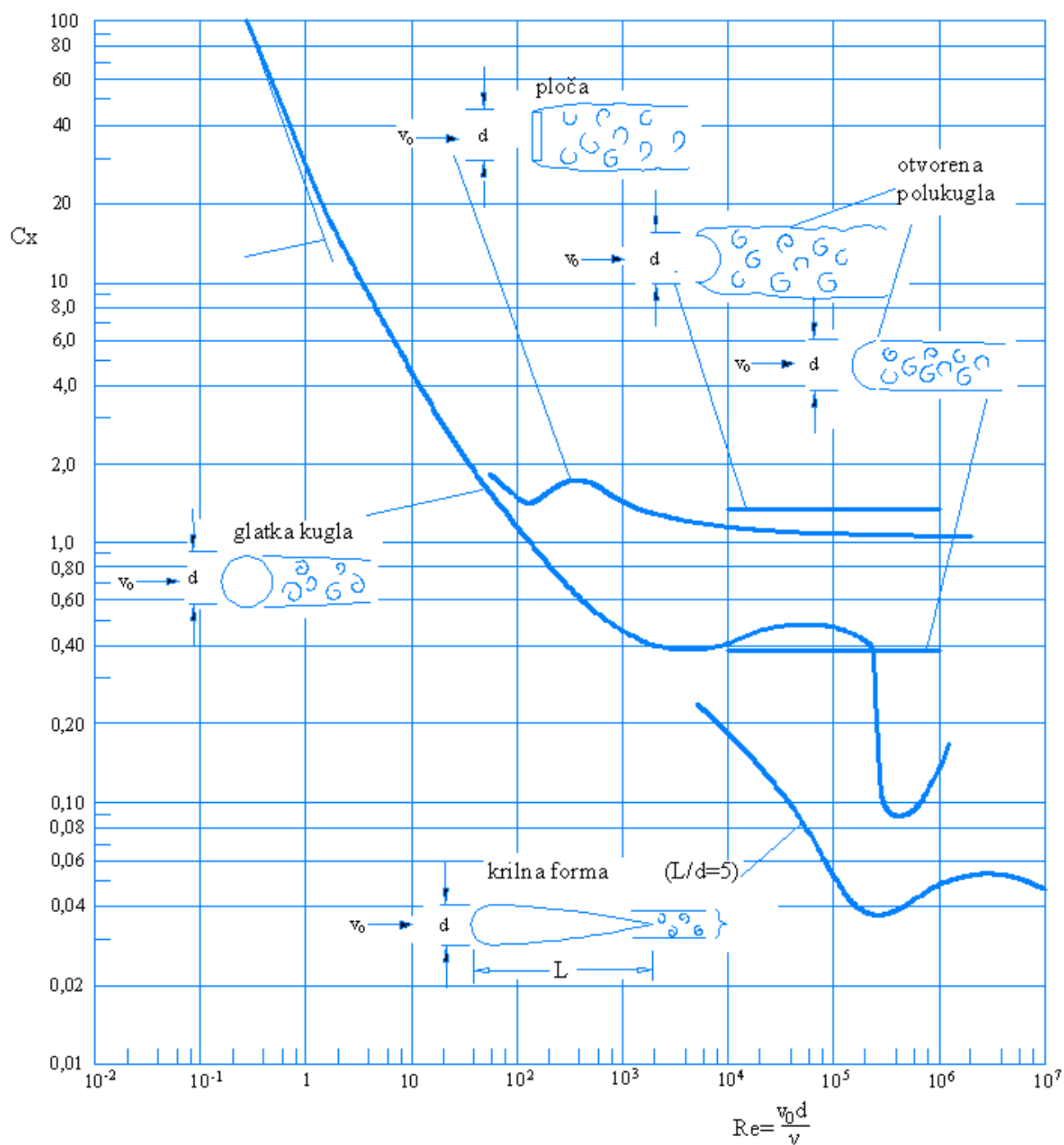


Slika 12.5 – opstrujavanje vertikalno položene ravne ploče sa odvajanjem graničnog sloja na rubovima ploče ($F_X = F_O$; $C_X = C_O$)

Primjeri vrijednosti koeficijenta otpora C_X za neke dvodimenzionalne i trodimenzionalne forme dobiveni temeljem eksperimentalnog istraživanja prema Roberson i Crove (1993) prikazani su na slikama 12.6. i 12.7.



Slika 12.6 – vrijednosti koeficijenta otpora C_x u funkciji Reynolds-ovog broja za neke dvodimenzionalne forme dobiveni temeljem eksperimentalnog istraživanja prema Roberson i Crove (1993)



Slika 12.7 – vrijednosti koeficijenta otpora C_x u funkciji Reynolds-ovog broja za neke trodimenzionalne forme dobiveni temeljem eksperimentalnog istraživanja prema Roberson i Crove (1993)

13 Eksperimentalna hidromehanika i modeliranje hidromehaničkih procesa

13.1 Uvod - pojam modela

Općenito *modelom* se opisuju pojave u prirodi na nama prihvatljiv način. Mnoge od opće prihvaćenih jednadžbi također predstavljaju model fizikalne stvarnosti koji omogućuju pouzdanost rezultata dobivenih njihovom upotrebom samo u ograničenom rasponu vrijednosti fizikalnih veličina. Tako primjerice drugi Newton-ov aksiom :

$$m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i \rightarrow \text{brzina promjene količine gibanja } m\vec{a} \text{ jednaka je sumi svih vanjskih sila } \sum_i \mathbf{F}_i \text{ na promatranu masu } m \quad (13.1)$$

predstavlja dobar opis prirodnih procesa samo u okvirima klasične mehanike dok na području brzina svjetlosti potreban je prijelaz na zakone kvantne mehanike.

Kao derivat Newtonovog II aksioma sa razradom članova vanjskih sila i prilagođenom za nestišljive tekućine uz zanemarenje utjecaja sila površinske napetosti dobiva se Navier – Stokes-ova jednadžba:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (13.2)$$

gdje je $\mathbf{v} (u, v, w)$ vektor brzina, $\mathbf{R}(X, Y, Z)$ vektor masenih sila, p tlak, ρ - gustoća a ν kinematski koeficijent viskoznosti.

Navier – Stokes-ova jednadžba je diferencijalna jednadžba drugog reda koja i u slučaju usvajanja pretpostavke bezviskoznog tečenja – Eulerova jednadžba ($\nu = 0$) još uvijek ostaje nelinearna. Za rješavanje jednadžbe potrebno je poznavanje rubnih uvjeta koji su vrlo složeni u općem prostornom slučaju tečenja. Navier – Stokes-ova jednadžba nema analitičko rješenje u zatvorenoj formi za opći 3D slučaj tečenja. Zbog toga je potrebno formiranje „jednostavnijeg“ modela kojim je moguće ostvariti zadovoljavajuću sličnost sa procesom u prirodi (matematički modeli sa numeričkim ili analitičkim približnim rješenjima, fizikalni modeli, hibridni modeli).

13.2 Fizikalni, numerički i hibridni modeli

Voda je jedna od bitnih i osnovnih tvari svih živih organizama i bez nje Zemlja bi bila mrtvi planet. Čak ukoliko se razmatraju samo oni njezini aspekti koji su klasificirani pod nazivljem *Hidraulike* u smislu prirodnih vodotoka u rijekama, estuarijima i morima, korištenjem vode za transport ili posljedice leda na okolinu, pokriva se široki raspon utjecaja na ljudski život i njegovu okolinu.

HYDROLAB konzorcij koji objedinjuje 15 reprezentativnih organizacija sa najznačajnijim hidrauličkim institucijama u devet zemalja na području Europe, inicirao je fundamentalnu diskusiju o poziciji laboratorijskih eksperimenata u metodologiji hidrauličkog istraživanja. Konzorcij je definirao strateški razvoj koji treba omogućiti ostvarenje novih ciljeva u želji za poboljšanje korištenja ustanova koje kao baznu djelatnost imaju hidraulička eksperimentalna istraživanja.

U prošlosti su hidrauličke studije poduzimane uglavnom u obliku fizikalnih modela na kojima su reproducirani fenomeni strujanja tekućina putem ostvarenja dinamičke sličnosti. U današnje vrijeme sve se više koriste numerički modeli koji omogućuju detaljniju prognozu uz mogućnost atraktivne prezentacije rezultata. Međutim svakako se mora držati na umu da je vjerodostojnost rezultata dobivenih na tim modelima u velikoj mjeri ovisna o pojednostavljenoj prezentaciji složenih procesa poput turbulencije i rubnih uvjeta. Također treba napomenuti da se poboljšanje predikcijskih mogućnosti numeričkog modela također još uvijek bazira na baždarnim laboratorijskim eksperimentima pod dobro kontroliranim laboratorijskim uvjetima. Numerički i fizikalni modeli mogu biti testirani ili formirani prema mjerenjima u naravi iz kojih je opet teško izvesti definitivne zaključke zbog cijelog niza nekontroliranih i neregistriranih prirodnih utjecaja. Nadalje, fizikalni modeli uveliko mogu poslužiti i za edukacijske svrhe na način da se razvija fizikalna intuicija pojedinca i osjećaj za rigoroznost znanstvene metodologije koja gubi preglednost u kontekstu vrlo složenih problema u prirodnim procesima. Važnost istraživanja na fizikalnim modelima putem eksperimenata mora biti prosuđivana u odnosu na druge istraživačke modele i alate poput teoretskih analiza, numeričkih modela ili istraživanja u naravi. Upravo fizikalni modeli u narednih dvadeset godina trebaju još cjelovitije «opskrbiti» numeričke modele sa procesnim informacijama te educirati inženjere i istraživače u procesima koje žele razumjeti.

Predsjedništvo HYDROLAB-a budućnost modeliranja sa fizikalnim modelima vidi na sljedeći način (citirano): «Budućnost fizikalnih modela u periodu narednih 20 godina vidimo u modeliranju složenih procesa koje još uvijek ne razumijemo u potpunosti. Kada istraživanja na fizikalnim

modelima stvore preduvjete za kvalitativnu nadgradnju numeričkih modela, potrebe za korištenjem fizikalnih modela će se pomaknuti na narednu razinu.»

Rad i pogonski troškovi velikih hidrauličkih centara je vrlo skup i samo djelom može biti pokriven sa dobitima od komercijalnih aktivnosti a u dugoročnom pogledu takove institucije trebaju biti subvencioniranih od strane javnih i državnih fondacija. Na isti takav način razvoj numeričkih metoda i modela počiva na korištenju i aktivnosti skupih akademskih centara i mreža.

Naša sposobnost opisivanja procesa u prirodi počiva na opažanjima i eksperimentima a zbog čega kvaliteta i točnost bilo koje prognoze vezane uz prirodni proces i utjecaj ljudskih zahvata u prirodu rezultira sa unaprijeđenjem prirodne znanosti. Izgradnja i formulacija bilo kojeg numeričkog modela bez odgovarajuće prateće eksperimentalno-laboratorijske djelatnosti opterećena je sa pretpostavkama i subjektivnim odabirom.

Trenutno stanje i trendovi u upotrebi različitih modela imaju sljedeća obilježja:

- Monitoring u naravi treba biti prioritetno pitanje a ne aktivnost koja se odvija u pozadini istraživanja
- Laboratorijsko eksperimentalno istraživanje zahtjeva infrastrukturu i ljudske resurse a što je ipak već ostvareno u proteklim godinama barem ukoliko se promatra europska zajednica u cjelini
- Laboratorijska istraživanja zadržavaju učešće odnosno imaju značajnu ulogu u istraživačko-znanstvenoj metodologiji
- Analitički modeli formiraju bazu za razumijevanje ali ipak trebaju eksperimentalno dokazane činjenice za njihov razvoj i provjeru pouzdanosti
- Analiza «pouzdanosti» je podcijenjena u pojedinim područjima inženjerske hidraulike no čini se da se sve više usvaja kao bitan dio razvojne metodologije
- Numerički modeli pokazuju trend agresivne zamjene drugih vrsta modela i poprimaju obilježja metodološke monokulture
- Praksa dobrog numeričkog modeliranja nije niti jednostavna niti jeftina te počiva na procesnim jednadžbama izvedenim sa eksperimentalnog istraživanja

Svaka kategorija modela ima svoje prednosti i nedostatke te ne postoji ona koja bi u svim slučajevima mogla dominirati. Sa razumnim odnosom poput zajedničke upotrebe različitih kategorija modela mogu se kompenzirati nedostaci i eksploatirati prednosti pojedinačnog vida modela.

U tablici 13.1 dani su taksativni navodi o trendovima u razvoju raznih tipova istraživačkih pristupa i alata a u tablici 13.2 dane su prednosti i nedostaci pojedinog izdvojenog pristupa istraživanju u hidrauličkoj problematici (prema HYDROLAB, 2004)

Mjerenje u naravi	premalno korištena prije i nakon egzekucije inženjerskih zahvata, pogotovo za analizu dugoročnih procesa (morfologije) ; konzistentnost programskog monitoringa teško održivog u duljem periodu ; varijacija pristupa analizi i tumačenju rezultata mjerenja ; koncentriranje na pojedine uslužne institucije ; korisničko uvjerenje da su informacije iz prirode dovoljne za generalizaciju svih zaključaka, potreba za poboljšanjem tehničkih mogućnosti mjernih instrumenata
Mjerenja u laboratorijima	stalna potreba za modernizacijom infrastrukture i instrumenata ; potreba dijeljenja većih infrastrukturnih blokova na više korisnika ; slabo kontrolirana ekspanzija
Hidraulički fizikalni modeli	uglavnom korišteni za komercijalne svrhe ; potrebna dodatna laboratorijska istraživanja za skaliranje, procjenu točnosti i pouzdanosti te konačnu interpretaciju
Analitički modeli	manje ekspertni i korišteni od numeričkih modela ali vrlo bitni za daljnji razvoj numeričkih modela
Analiza ponašanja sustava	specijalističko područje samo nekoliko instituta ; nepostojanje «kritične mase» korisnika
Analiza neizvjesnosti	tek u povojima i za sada na vrlo niskoj razvojnoj razini ; neprihvaćenost u sadašnjem znanstvenom okruženju
Numerički modeli	brzi razvoj na širokoj fronti problema ali metodološki vrlo ranjiv zbog nedostatka konkretne provjere ; upitno znanja korisnika i nezadovoljavajući pristup procjeni neizvjesnosti

Tablica 13.1 – trendovi u razvoju raznih tipova istraživačkih pristupa i alata (prema HYDROLAB, 2004)

	PREDNOSTI	NEDOSTACI
Mjerenje u naravi	uvid u stvarnu složenost procesa ; zbirni efekt svih postojećih utjecaja ; doprinosi razvoju novih tehnologija	nekonzistentnost mjerenja ; nedostatak financijske potpore, teško ostvarivo generaliziranje, visoki troškovi ; manjkava točnost
Mjerenja u laboratorijima	kontrolirani uvjeti ; ponovljivost ; mogućnost opažanja i vizualizacije	mogući efekti skaliranja i efekta modela ; upitna reprezentativnost
Hidraulički fizikalni modeli	kontrolirani uvjeti ; ponovljivost ; mogućnost opažanja i vizualizacije	mogući efekti skaliranja i efekta modela ; upitna reprezentativnost ; nepovoljan odnos troškova i polučeni zaključaka
Analitički modeli	manje ekspertni i korišteni od numeričkih modela ali vrlo bitni za daljnji razvoj numeričkih modela	visoki stupanj idealizacije ; teško dodavanje nove razine kompleksnosti ; ukoliko prekompleksni gube direktan i jednostavan uvid
Analiza ponašanja sustava	specijalističko područje samo nekoliko instituta ; nepostojanje «kritične mase» korisnika	visoki stupanj idealizacije
Analiza neizvjesnosti	tek u povojima i za sada na vrlo niskoj razvojnoj razini ; neprihvaćenost u sadašnjem znanstvenom okruženju	teško prihvaćanje krajnjeg korisnika
Numerički modeli	brzi razvoj na širokoj fronti problema ali metodološki vrlo ranjiv zbog nedostatka konkretne provjere ; upitno znanja korisnika i nezadovoljavajući pristup procjeni neizvjesnosti	korišteni cijeli niz aproksimacija ; izuzeće cijelih procesa prisutnih u prirodi ; eksplicitne parametarske vrijednosti ; u pojedinim dijelovima se koristi deterministički pristup

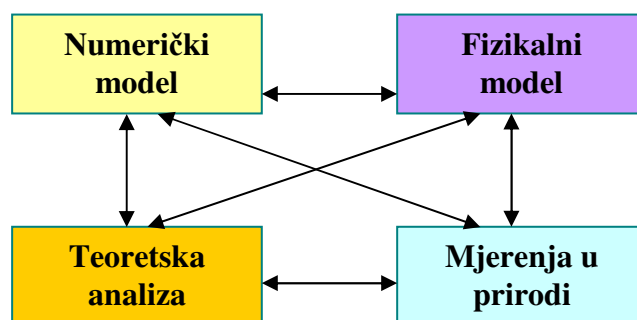
Tablica 13.2 – prednosti i nedostaci pojedinog izdvojenog pristupa istraživanju (prema HYDROLAB, 2004)

Kombinirano korištenje metodologija i vidova modela reducira rizik od odabira «pogrešnog» pristupa te je moguće formiranje boljeg razumijevanja i daljnjih novih metoda. Naravno, raznolikost metodološkog pristupa baza je za inovativne iskorake.

S druge strane, apsolutna dominacija pojedinog vida modeliranja vodi do atrofije ostalih pa ta neželjena tendencija prema metodološkoj mono-kulturi povećava rizik neuočavanja značajnih principijelnih pogrešaka. Ukoliko se izgubi osnovna infrastrukturna podloga (institucije i ljudski resurs obogaćen znanjem) pojedinog pristupa vrlo ju je teško ponovno revitalizirati.

Korištenje numeričkih modela u svrhu smanjenja efekta modela i efekta mjerila na fizikalnim modelima nije dovoljno eksploatirano iako je sa numeričkim modelima vrlo često moguće naći mjeru za kompenzaciju spomenutih neželjenih efekata na fizikalnih modelima.

Prema tome u smislu traženja konačnih odgovora na pitanja vezana uz fiziku hidrauličkih procesa dobrodošlo je formiranje hibridnih modela koji omogućavaju eksploataciju svih parcijalnih vidova modeliranja sa postojećim međusobnim interakcijskim vezama (vidi sliku 13.1). Takova metodologija daje najbolju perspektivu u želji za zadovoljenjem modernih praktičnih i znanstvenih zahtjeva i zaobilaznjem mogućih problema (visoke cijene istraživanja u naravi koja su uglavnom vezana na «točkasto» istraživanje, baždarenja numeričkih modela na temelju mjerenja u naravi i u laboratorijima, efekti mjerila i modela na fizikalnim modelima ...)



Slika 13.1 – Prijedlog metodološkog pristupa istraživanju (HYDROLAB, 2004)

Imajući na raspolaganju takovu varijabilnost alata omogućava se i njihova kompeticija pa otkrivene «pouzdanosti» unutar jedne metodologije mogu biti izazov za druge. Kratkoročno gledano to se može činiti kontraproduktivnim, no dugoročno time se ostvaruje bolje utemeljena baza znanja kojom se izbjegava rizik razvoja apsolutne vjere u pouzdanost samo pojedine metodologije.

13.3 Fizikalni modeli

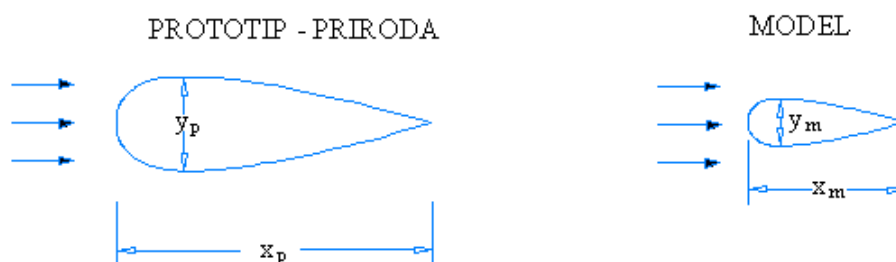
Fizikalni model je izgrađena fizička cjelina na kojoj se zbog *geometrijske, kinematske i dinamičke* sličnosti sa oponašanim prototipom (prirodom) mogu izvršiti mjerenja i analize a dobiveni rezultati se mogu *ekstrapolirati* na prototip. Kako bi se ostvarila željena mehanička sličnost procesa na modelu i u prirodi-prototipu, model se izrađuje u određenim mjerilima uz zadovoljenje uvjeta sličnosti.

13.3.1 Geometrijska sličnost

Uvjet geometrijske sličnosti dvaju tokova je opisan jednakošću duljina, površina i volumena sa karakterističnim omjerima (slika 13.2):

$$L_r = \frac{L_p}{L_m} = \lambda \quad ; \quad A_r = \frac{A_p}{A_m} = \frac{L_p^2}{L_m^2} = L_r^2 = \lambda^2 \quad ; \quad V_r = \frac{V_p}{V_m} = \frac{L_p^3}{L_m^3} = L_r^3 = \lambda^3 \quad (13.3a,b,c)$$

gdje je L_r mjerilo dužina, L_p vrijednost dužine u prirodi, L_m vrijednost dužine na modelu, A_p vrijednost površine u prirodi, A_m vrijednost površine na modelu, V_p vrijednost volumena u prirodi, V_m vrijednost volumena na modelu. Indeksna oznaka « p » označava fizikalnu veličinu u mjerilu prirode-prototipa a « m » u mjerilu modela.



Slika 13.2 – primjer prototipa (mjerilo prirode) i modela (mjerilo modela)

13.3.2 Kinematska sličnost, sličnost svojstva tekućina i tlakova

Kinematska sličnost dvaju tokova biti će ostvarena ako su zadovoljeni omjeri vremena, brzina i ubrzanja:

$$t_r = \frac{t_p}{t_m} \quad (13.4a)$$

$$v_r = \frac{v_p}{v_m} = \frac{L_p / t_p}{L_m / t_m} = \frac{L_p t_m}{L_m t_p} = \frac{L_r}{t_r} \quad (13.4b)$$

$$a_r = \frac{a_p}{a_m} = \frac{v_p / t_p}{v_m / t_m} = \frac{v_p t_m}{v_m t_p} = \frac{L_r}{t_r^2} \quad (13.4c)$$

a mjerila svojstva tekućina (gustoće, kinematske viskoznosti) i tlakova su:

$$\rho_r = \frac{\rho_p}{\rho_m} \quad ; \quad \nu_r = \frac{\nu_p}{\nu_m} \quad ; \quad p_r = \frac{p_p}{p_m} = \frac{F_r}{L_r^2} \quad (13.5a,b,c)$$

13.3.3 Dinamička sličnost

Ostvarivanje dinamičke sličnosti je osim kinematske i geometrijske sličnosti također nužan uvjet za postizanje sličnosti tečenja u prirodi i na modelu. Dinamička sličnost biti će ostvarena ukoliko se pojedine djelujuće sile nalaze u omjeru sila:

$$F_r = \frac{F_p}{F_m} \quad (13.6)$$

13.3.4 Apsolutna mehanička sličnost

Navier-Stokesova jednačba za mjerilo prirode i mjerilo modela definirana je sljedećim izrazima:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_p = \mathbf{R}_p - \frac{1}{\rho_p} \text{grad } p_p + \nu_p \Delta \mathbf{v}_p \quad (13.7a)$$

$$a_r \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_m = R_r \mathbf{R}_m - \frac{p_r}{\rho_r L_r} \frac{1}{\rho_m} \text{grad } p_m + \frac{\nu_r \nu_r}{L_r^2} \nu_m \Delta \mathbf{v}_m \quad (13.7b)$$

Ukoliko se koristi ista tekućina u analizama na modelu kao što je i u prirodi, apsolutnu mehaničku sličnost moguće je u potpunosti ostvariti samo ukoliko vrijedi jednakost koeficijenata (mjerila):

$$a_r = R_r = \frac{\nu_r^2}{L_r} = \frac{p_r}{\rho_r L_r} = \frac{\nu_r \nu_r}{L_r^2} = 1 \quad (13.8)$$

a što je zadovoljeno jedino u slučaju izbora mjerila duljina $L_r = 1$. U većini praktičnih slučajeva istraživanja na fizikalnim modelima, primjerice u analizi proloma brane i propagacije poplavnog vala, besmisleno je izgrađivati model u mjerilu prototipa ($L_r = 1$) pa apsolutna mehanička sličnost neće biti ni postignuta. S druge strane, u općem slučaju vrlo složenog strujanja, nije dostupna ni proizvoljna tekućina sa takvim „fleksibilnim“ fizikalnim svojstvima koja bi omogućila ostvarenje apsolutne sličnosti i pri $L_r \neq 1$. No u praksi nije rijedak slučaj da se istraživanja na fizikalnim modelima ipak provode i sa različitim tekućinama od onih koje se pojavljuje u prirodi a čime se omogućuje dodatna fleksibilnost u odabiru mjerila duljina. U slučajevima kada postoji potreba za rezultatima vrlo visokog stupnja točnosti i pouzdanosti izvode se i modeli u mjerilu duljina $L_r = 1$. Primjer takvih ispitivanja je prisutan u automobilskoj industriji u kojoj se ispitivanja otpora automobila pri opstrujavanju zrakom izvode u zračnim tunelima u kojima je postavljen model automobila izveden u mjerilu duljina $L_r = 1$.

13.3.5 Newtonov uvjet sličnosti

Na temelju mjerila ubrzanja (jednadžba 12.4c) i tlaka (jednadžba 12.5c) dobiva se i mjerilo sila prema Newton-ovom uvjetu sličnosti:

$$a_r = \frac{L_r}{t_r^2} = \frac{p_r}{\rho_r L_r} \quad \text{i} \quad p_r = \frac{F_r}{L_r^2} \quad \rightarrow \quad F_r = \rho_r \frac{L_r^4}{t_r^2} \quad (13.9a,b,c)$$

kojim je definirana ovisnost inercionih sila F_r naspram kinematskih mjerila duljine L_r i vremena t_r te mjerila gustoća ρ_r .

13.3.6 Parcijalne dinamičke sličnosti

Kao što je spomenuto u prethodnom poglavlju, u slučaju odabira mjerila duljina $L_r > 1$ i pri odabiru iste tekućine za modelska ispitivanja kao i u prirodi, narušen je uvjet apsolutne mehaničke sličnosti. No to ne znači da je ispitivanje na fizikalnom modelu nema svrhu. Ukoliko od svih vanjskih sila u nekoj hidrodinamičkoj pojavi značajno dominira utjecaj samo jedne sile, primjerice gravitacije ili viskoznosti, onda će za „zadovoljavajuću-približnu“ sličnost inercionih sila na modelu i prototipu biti potrebno zadovoljiti samo sličnost dominantne vanjske sile. Zadovoljenje takvih uvjeta sličnosti sila naziva se i parcijalna sličnost. Zbog toga je prvi korak u postavljanju fizikalnog modeliranja određivanje dominantne vanjske sile u samom hidrodinamičkom procesu odnosno dominantnog člana desne strane Navier-stokes-ove jednadžbe.

Froude-ov kriterij sličnosti

Ukoliko je u hidrodinamičkom procesu u mjerilu prirode dominantan utjecaj gravitacione sile, parcijalna dinamička sličnost na fizikalnom modelu biti će zadovoljena kroz ostvarenje istog doprinosa masenih sila u inercionoj sili:

$$a_r = \frac{v_r^2}{L_r} = R_r = \frac{p_r}{\rho_r L_r} = \frac{v_r v_r}{L_r^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v_r^2}{L_r R_r} = 1 \quad (13.10)$$

što uz spomenute indeksne oznake za mjerilo prirode i mjerilo modela daje odnose:

$$\frac{v_p^2}{L_p g_p} = \frac{v_m^2}{L_m g_m} \quad \rightarrow \quad Fr_p = Fr_m \quad (13.12a,b)$$

Kako se iz prethodnog izraza može uočiti, ukoliko je u procesu u mjerilu prirode dominantna vanjska sila gravitacijska sila, za postizanje parcijalne sličnosti potrebno je osigurati jednakost Froude-ovog broja na modelu i u prirodi. Time se osigurava jednaki doprinos sile gravitacije u inercionoj sili pri hidrodinamičkom procesu u prirodi i na modelu.

Daljnje kinematske izvedenice su mjerilo brzina i vremena prema Froude-ovom kriteriju sličnosti:

$$v_r = \frac{v_p}{v_m} = L_r^{1/2} \quad i \quad t_r = \frac{L_r}{v_r} = L_r^{1/2} \quad (13.12a,b)$$

Kako se to iz prethodnih jednadžbi može uočiti, pri standardnom izboru mjerila duljina $L_r > 1$, brzine koje se pojavljuju na modelu manje su od brzina u prirodi, odnosno izmjerena brzina na modelu prenosi se u mjerilo prirode sa koeficijentom koji je >1 .

Izvedba fizikalnog modela prema Froude-ovom kriteriju sličnosti u praksi je vezana uz analizu propagacije poplavnog vala pri lomu brane, analizi kratkih objekata u tečenju sa slobodnim vodnim licem (preljevi), suženja i proširenja presjeka korita te deformacije gravitacionih vjetrovnih valova u akvatorijima luka.

Reynolds-ov kriterij sličnosti

Ukoliko je u hidrodinamičkom procesu u mjerilu prirode dominantan utjecaj sile viskoznosti, parcijalna dinamička sličnost na fizikalnom modelu biti će zadovoljena kroz ostvarenje istog doprinosa viskoznih sila u inercionoj sili:

$$a_r = \frac{v_r^2}{L_r} = R_r = \frac{P_r}{\rho_r L_r} = \frac{v_r v_r}{L_r^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{v_r L_r}{\nu_r} = 1 \quad (13.13)$$

što uz spomenute indeksne oznake za mjerilo prirode i mjerilo modela daje odnose:

$$\frac{v_p L_p}{\nu_p} = \frac{v_m L_m}{\nu_m} \quad \rightarrow \quad Re_p = Re_m \quad (13.14a,b)$$

Kako se iz prethodnog izraza može uočiti, ukoliko je u procesu u mjerilu prirode dominantna sila viskoznosti, za postizanje parcijalne sličnosti potrebno je osigurati jednakost Reynolds-ovog broja na modelu i u prirodi. Time se osigurava jednaki doprinos viskoznih sila u inercionoj sili pri hidrodinamičkom procesu u prirodi i na modelu.

Daljnje kinematske izvedenice su mjerilo brzina i vremena prema Reynolds-ovom kriteriju sličnosti:

$$v_r = \frac{v_p}{v_m} = \frac{\nu_r}{L_r} \quad i \quad t_r = \frac{L_r^2}{\nu_r} \quad (13.15a,b)$$

Kako se to iz prethodnih jednadžbi može uočiti, pri izboru mjerila duljina $L_r > 1$, brzine koje se pojavljuju na modelu veće su od brzina u prirodi, odnosno izmjerena brzina na modelu prenosi se u mjerilo prirode sa koeficijentom koji je < 1 . Izvedba fizikalnog modela prema Reynolds-ovom kriteriju sličnosti u praksi je vezana uz analizu mjernih instrumenata u cjevovodima pod tlakom te pri obstrujavanju oblikih i dugačkih profila pri relativno malim brzinama.

Mach-ov kriterij sličnosti

Pri analizi dinamike kompresibilnih tekućina potrebno je uzeti u obzir i sile promjene oblika (Hook-ov zakon $\sigma = E \frac{\Delta l}{l}$; $F \sim EA$) pa uvođenjem omjera modula elastičnosti u prirodi i na modelu dobiva se jednakost:

$$E_r = \frac{E_p}{E_m} \quad (13.16)$$

Prema Newton-ovom uvjetu sličnosti inercionih sila mjerilo sila je definirano izrazom:

$$F_r = \rho_r v_r^2 L_r^2 = E_r L_r^2 \quad (13.17)$$

pa je za ostvarenje sličnosti potrebno zadovoljiti Mach-ov kriterij odnosno jednakost Mach-ovih brojeva u prirodi i na modelu:

$$\frac{v_p}{\sqrt{\frac{E_p}{\rho_p}}} = \frac{v_m}{\sqrt{\frac{E_m}{\rho_m}}} \quad \rightarrow \quad Ma_p = Ma_m \quad (13.18a,b)$$

iz kojeg se dobiva i odgovarajuće mjerilo brzina:

$$v_r = \sqrt{\frac{E_r}{\rho_r}} \quad (13.19)$$

Izvedba fizikalnog modela prema Mach-ovom kriteriju sličnosti u praksi je vezana uz analizu vodnog udara u cjevovodima pod tlakom pri kojemu se tekućina promatra kao stišljiva.

Weber-ov kriterij sličnosti

Pri analizi dinamike tekućina sa izraženom zakrivljenosti vodne površine potrebno je uzeti u obzir i kapilarne sile zbog učešća sila površinske napetosti ($F \sim KA / r$). Zbog toga je potrebno ostvariti iste vrijednosti konstante kapilarnosti u prirodi i na modelu:

$$K_r = \frac{K_p}{K_m} \quad (13.20)$$

Prema Newton-ovom uvjetu sličnosti inercionih sila mjerilo sila je definirano izrazom:

$$F_r = \rho_r v_r^2 L_r^2 = K_r L_r \quad (13.21)$$

pa je za ostvarenje sličnosti potrebno zadovoljiti Weber-ov broj odnosno jednakost Weber-ovih brojeva u prirodi i na modelu:

$$\frac{\rho_p v_p^2 L_p}{K_p} = \frac{\rho_m v_m^2 L_m}{K_m} \rightarrow We_p = We_m$$

iz kojeg se dobiva i odgovarajuće mjerilo brzina :

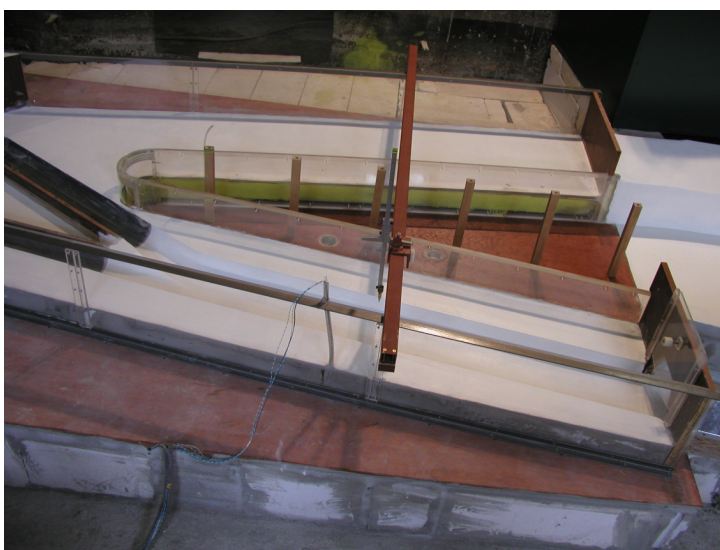
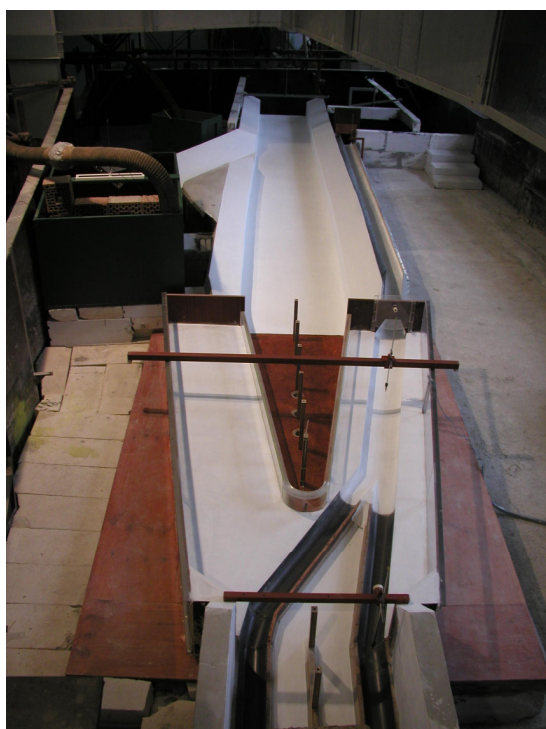
$$v_r = \sqrt{\frac{K_r}{\rho_r L_r}} \quad (13.22)$$

Izvedba fizikalnog modela prema Weber-ovom kriteriju sličnosti u praksi je vezana uz analizu širenja kapilarnih valova (brzina propagacije kapilarnih valova $c < 23$ cm/s)

Na slici 13.2 dan je prikaz fizikalnog modela preljeva izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju GFZ (Froudeova sličnost ; $L_r = ---$). Na slici 13.3 dan je prikaz fizikalnog modela rasteretnog preljeva GOK-a izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju GFZ (Froudeova sličnost ; $L_r = 16,7$). Na slici 13.4 dan je prikaz fizikalnog modela luke Split izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju IGH (Froudeova sličnost ; $L_r = 50$). Na slici 13.5 dan je prikaz fizikalnog modela kajakaške staze izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju GFZ (Froudeova sličnost ; $L_r = 25/15$). Na slici 13.5 dan je prikaz prototipa i fizikalnog modela dionice dovodnog kanala predrešetke, taložnice i rešetke na ulazu u temeljni ispušt retencije „Kuniščak“ u Zagrebu (model izveden u hidrotehničkom laboratoriju GFZ ; Froudeova sličnost ; $L_r = 5$).



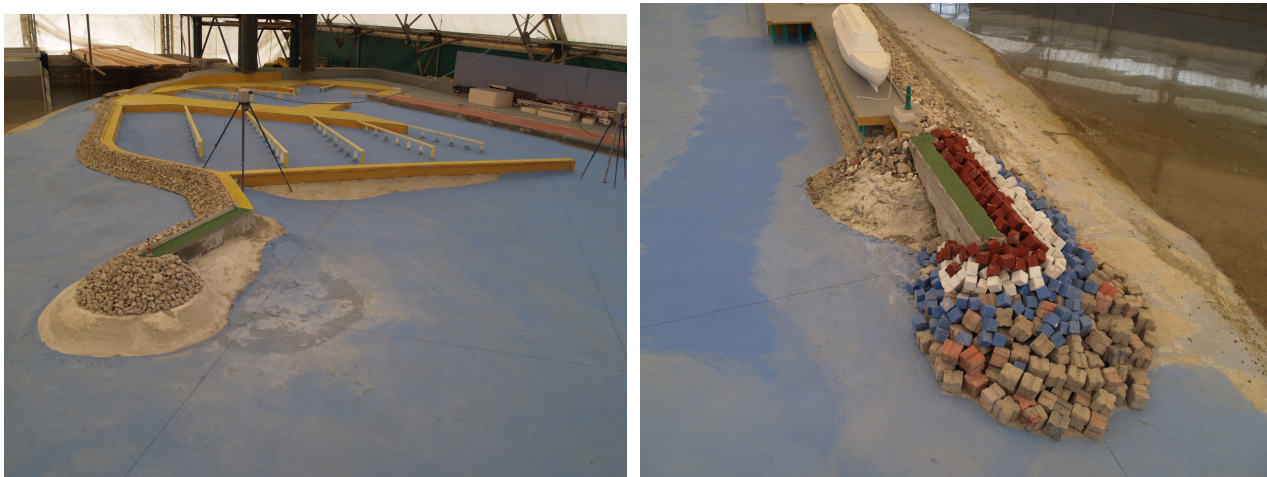
Slika 13.2 – prikaz fizikalnog modela preljeva izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju GFZ (Froudeova sličnost ; $L_r = \dots$)



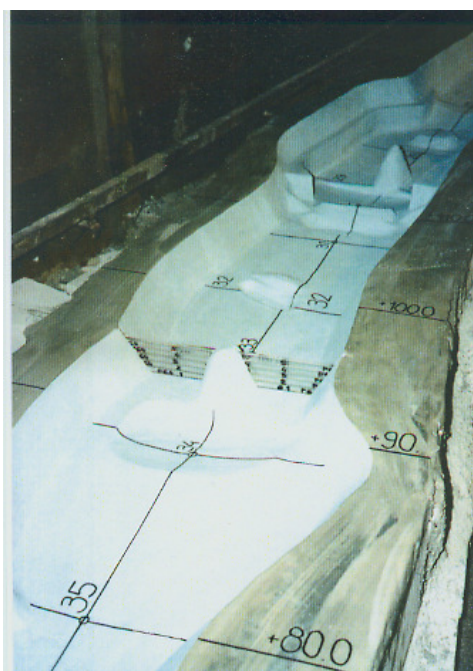
Slika 13.3a,b - prikaz fizikalnog modela rasteretnog preljeva GOK-a izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju GFZ (Froudeova sličnost ; $L_r = 16,7$)



Slika 13.4a,b - prikaz fizikalnog modela luke Split izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju IGH (Froudeova sličnost ; $L_r = 50$; izgled fizikalnog modela Gradske luke Split – pogled na sjevernu (lijevo) i južnu (desno) stranu luke)



Slika 13.4c,d - prikaz fizikalnog modela luke Split izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju IGH (Froudeova sličnost ; $L_r = 50$; detalji fizikalnog modela Gradske luke Split – ACI marina (lijevo) glavni lukobran (desno))



Slika 13.5 - prikaz fizikalnog modela kajakaške staze izvedenog u hidrotehničkom laboratoriju GFZ (Froudeova sličnost ; $L_r = 25/15$)



Slika 13.6 - prikaz prototipa (lijevo) i fizikalnog modela (desno) dionice dovodnog kanala predrešetke, taložnice i rešetke na ulazu u temeljni ispust retencije „Kuniščak“ u Zagrebu (model izveden u hidrotehničkom laboratoriju GFZ ; Froudeova sličnost ; $L_r = 5$)

13.4 Dimenzionalna analiza

Dimenzionalna analiza je temeljna analiza koja se upotrebljava u svim granama znanosti. Dimenzionalna analiza se temelji na racionalnom razmišljanju koje navodi na zaključak da jednadžbe kojima se opisuju procesi u fizici i koje sadrže fizikalne veličine moraju biti dimenziono homogene. To nadalje znači da postoji neovisan sustav jedinica kojima se izražavaju pojedine fizikalne veličine koje se pojavljuju u jednadžbama. Temeljne fizikalne veličine sa pripadnim dimenzijama u mehanici su duljina [$L=m$], masa [$M=kg$] i vrijeme [$T=s$]. Ostale fizikalne veličine su izvedenice, pa primjerice brzina [L/T] ima dimenziju [m/s] a sila [F] ima dimenziju [$kgm/s^2=N$].

Za primjer upotrebe dimenzionalne analize promatra se slučaj određivanja koeficijenta otpora oblika C_O kugle pri opstrujavanju realnom tekućinom. Prvi korak je racionalno donošenje odluke o fizikalnim veličinama koje su relevantne u samom procesu a to su:

- brzina pristrujavanja v
- dinamički koeficijent viskoznosti μ
- gustoća tekućine ρ
- promjer kugle D

U funkcionalnoj formi dobiva se slijedeća formulacija odnosa između ovisne fizikalne veličine sile otpora oblika F_O i prethodno definiranih neovisnih fizikalnih veličina:

$$F_O = f_l(v, \mu, \rho, D) \quad (13.23)$$

koje imaju slijedeće dimenzije:

$$[F_o] = [F] \quad ; \quad [v] = [L/T] \quad ; \quad [\mu] = [FT/L^2] \quad ; \quad [\rho] = [FT^2/L^4] \quad ; \quad [D] = [L]$$

Slijedeći korak je da se izraz 13.23 prebaci u formu funkcionala koji sadrži samo bezdimenzionalne fizikalne veličine a sa kojima je također opisan proces. Naravno, te bezdimenzionalne veličine formirane su upravo od dimenzionalnih veličina iz izraza 13.23.

U smislu sistematizacije daljnje provedbe dimenzionalne analize potrebno je odabrati jednu neovisnu fizikalnu veličinu iz skupa (v , μ , ρ , D) koju se kroz kombiniranje (dijeljenje i množenje) sa ostalim fizikalnim veličinama (neovisnim i ovisnim) pretvara u bezdimenzionalni parametar. Procedura se ponavlja i sa preostalim neovisnim fizikalnim veličinama iz skupa (v , μ , ρ , D) sve dok jednadžba procesa nije izražena samo sa novonastalim bezdimenzionalnim parametrima.

Primjer provedbe je slijedeći: odabere se neovisna fizikalna veličina ρ u svrhu eliminacije [F] iz preostalih neovisnih i ovisnih fizikalnih veličina koji također sadrže dimeziju [F]. To su ovisna fizikalna veličina F_o i neovisna fizikalna veličina μ . Ukoliko se koristi operacija dijeljenja dobiva se novi oblik funkcionala izraženog na način :

$$\frac{F_o}{\rho} = f_2\left(v, \frac{\mu}{\rho}, D\right) \quad (13.24)$$

Jednadžba 13.24 sadrži još samo osnovne dimenzije [L] i [T]:

$$\frac{F_o}{\rho} = \left[\frac{L^4}{T^2} \right] \quad ; \quad \frac{\mu}{\rho} = \left[\frac{L^2}{T} \right]$$

Sada se odabire neovisna fizikalna veličina v u svrhu eliminacije [T]. Budući da je [T] u F_o/ρ prisutan sa drugom potencijom a u μ/ρ sa prvom potencijom dijeljenje se provodi sa v^2 i sa v . Ponovno je dobiven novi oblik funkcionala koji je izražen na način :

$$\frac{F_o}{\rho v^2} = f_3\left(\frac{\mu}{\rho v}, D\right) \quad (13.25)$$

Jednadžba 13.25 sadrži još samo osnovnu dimenziju [L]:

$$\frac{F_0}{\rho v^2} = [L^2] \quad ; \quad \frac{\mu}{\rho v} = [L]$$

Posljednji korak u ovom primjeru je eliminacija dimenzije [L] dijeljenjem $F_0/\rho v^2$ sa D^2 i $\mu/\rho v$ sa D . Time je dobivena i konačna forma bezdimenzionalnog funkcionala:

$$\frac{F_0}{\rho v^2 D} = f_4\left(\frac{\mu}{\rho v D}\right) \quad (13.28)$$

koji sadrži samo bezdimenzionalne parametre:

$$\frac{F_0}{\rho v^2 D^2} = [1] \quad ; \quad \frac{\mu}{\rho v D} = [1]$$

Na ovaj način je prvobitni skup od pet dimenzionalnih članova, relevantnih za analizirani proces, sveden na samo dva bezdimenzionalna člana. Ovime se znatno pojednostavljuje prikaz ekperimentalnih istraživanja. U klasičnom dimenzionalnom dijagramskom prikazu potreban je jedan dijagram za definiranje utjecaja v na F_0 (jedna krivulja na dijagramu $F_0 = f(v)$) uz fiksirane vrijednosti za μ , ρ i D . Na istom dijagramu moguć je još i prikaz ovisnosti o μ a čime se dobiva niz krivulja na jednom dijagramu ($F_0 = f(v, \mu)$) uz fiksirane ρ i D . Međutim, ako se želi prikazati i ovisnost o ρ potrebno je kreiranje cijelog niza dijagrama za svaki pojedini ispitivani ρ (dijagram „1“ $\rightarrow F_0 = f(v, \mu, \rho_1)$, dijagram „2“ $\rightarrow F_0 = f(v, \mu, \rho_2)$, ... , dijagram „n“ $\rightarrow F_0 = f(v, \mu, \rho_n)$) uz fiksirani D . Daljnja dijagramska prezentacija o utjecaju varijacije D na silu F_0 zahtijeva ponavljanje svih prethodnih dijagrama i to „m“ puta, gdje je „m“ broj ispitivanih promjera D .

Korištenjem prikazanog postupka dimenzionalne analize odnosno formiranjem bezdimenzionalnih parametara moguće je sve ovo prikazati na samo jednom dijagramu u obliku već spomenute

funkcijske ovisnosti
$$\frac{F_0}{\rho v^2 D} = f\left(\frac{\mu}{\rho v D}\right).$$

LITERATURA

POGLAVLJE 1

Hirschfelder, J. O.; Curtiss, C. F.; Bird, R. B.: *Molecular theory of gases and liquids*, Wiley & Sons, New York, 1964.

Holman, J. P.: *Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, 1997.

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2005.

Reid, R. C.; Sherwood, T. K.: *The properties of gases and liquids, Their estimation and correlation*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Skelland, A. H. P.: *Non-newtonian flow and heat transfer*, Wiley & Sons, New York, 1967.

White, F. M.: *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, New York, 2005.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJE 2

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2005.

Chadwick, A. ; Morfett, J.; Bortwick, M.: *Hydraulics in civil and environmental engineering*, Spon Press, London-New York, 2004.

Press, H.; Schroeder, R.: *Hydromechanik im Wasserbau*, Ernst&Sons, Berlin, 1966.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJA 3 i 4

Batchelor, G. K.: *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2005.

Hansen, A. G.: *Fluid mechanics*, Wiley, New York, 1967.

Lamb, H.: *Hydrodynamics*, Dover, New York, 1945.

Press, H.; Schroeder, R.: *Hydromechanik im Wasserbau*, Ernst&Sons, Berlin, 1966.

White, F. M.: *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, New York, 2005.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJA 5 i 6

Abbott, M. B.; Basco, D. R.: *Computational fluid dynamics – an introduction for engineers*, Pitman, London, 1979.

Anderson, J. D.: *Computational fluid dynamics: The basics with applications*, McGraw-Hill, New York, 1995.

Hinze, J. O.: *Turbulence, an introduction to its mechanism and theory*, McGraw-Hill, New York, 1975.

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2006.

Taylor, G. I.: *The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion*, Proc.Roy.Soc. A135 (1932), 685-705.

Patankar, S. V.: *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, New York, 1980.

Prandtl, L.; Tietjens, O. G.: *Fundamentals of hydro and aeromechanics*, Dover, New York, 1957.

Rodi, W.: *Turbulence Models and their Application in Hydraulics – A state of the art Review*, Special IAHR Publication, 1980.

White, F. M.: *Viscous fluid flow*, McGraw-Hill, New York, 2005.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJE 7

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2006.

Schlichting, H.: *Boundary-layer theory*, McGraw-Hill, New York, 1979.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJE 8

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2006.

Press, H.; Schroeder, R.: *Hydromechanik im Wasserbau*, Ernst&Sons, Berlin, 1966.

Smith, A. J.: *Pressure losses in ducted flows*, Butterworths, London, 1971.

Streeter, V. L.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1986.

Schroeder, R.: *Stroemungsberechnungen im bauwesen*, Bau-ing Prax., Heft 121/122, Ernst&Sons, Berlin, 1968/72.

Truckenbrodt, E.: *Zur integralen Darstellungen der Energiegleichungen der Stroemungsmechanik*, Luft- und Raumf., FB 77-16 (1977), 265-270.

Truckenbrodt, E.: *Ueber den Einfluss der Reibung in der Energiegleichungen der Stroemungsmechanik*, Recent developments in theoretical and experimental fluid mechanics, str. 616-626, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJE 9

Chow, V. T.: *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1954.

French, R. H.: *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 1987.

Jain, S. C.: *Open Channel Flow*, Willey, New York, 2000.

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2006.

Sturm, T. W.: *Open Channel Hydraulics*, McGraw-Hill, New York, 2001.

Smith, C. D.: *Hydraulic Structures*, University of Saskatchewan Printing Services, Saskatoon-CA, 1995.

Stojić, P.: *Hidrotehničke građevine - knjiga III*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu , Split, 1999.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJE 10

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2006.

Press, H.; Schroeder, R.: *Hydromechanik im Wasserbau*, Ernst&Sons, Berlin, 1966.

POGLAVLJE 11

Jović, V.: *Uvod u hidromehaniku*, Element, Zagreb, 2006.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.

POGLAVLJE 12

Benedickt, R. P.: *Fundamentals of temperature, pressure, and flow measurement*, Wiley, New York, 1984.

Kobus, H.: *Hydraulic Modelling*, German association for water resources and land improvement, Verlag Paul Parley, Berlin, 1980

Miller, R. W.: *Flow measurement engineering handbook*, McGraw-Hill, New York, 1996.

Novak, P., Čabelka, J.: *Models in Hydraulic Engineering*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1981.

Sharp, J. J.: *Hydraulic Modeling*, Butterworth, London, 1981.

Yalin, M. S.: *Theory of hydraulic models*, Macmillan, London, 1971.

White, F. M.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2005.